

1 9 2 4

AUG 13 1924

N r. 14

MEDICAL ROOM  
GENERAL LIBRARY  
UNIV. OF MICH.

# ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH  
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,  
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE  
BAND 74 HEFT 6  
DER GANZEN REIHE 379. BANDES 6. HEFT

KURATORIUM:  
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT  
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1924 erscheinen Bd. 73, 74 u. 75 à 8 Hefte.

Preis von Band 74 für Deutschland Goldmark 20.—; England £ 1—;  
Holland fl. 11.50; Schweiz Fr. 25.—, U.S.A. \$ 4.50.

Ausgegeben im Juli 1924.

# Inhalt.

	Seite
1. Ernst Zachmann. Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit metaldampfhaltiger Flammen mit Einführung einwandfreier Feldmessungen . . . . .	461
2. Kornel Lanczos. Flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie . . . . .	518
3. Karl F. Lindman. Über eine von einem asymmetrisch-tetraedrischen und von einem spiralförmigen Molekülmodell erzeugte Drehung der Polarisationssebene der elektromagnetischen Wellen .	541
4. E. Gehrcke und E. Lau. Die Intensitätsverteilung der Komponenten von $H_\alpha$ . . . . .	574

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Leopoldstraße 91.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

da

ül

se

du

na

ge

zu

du

an

M

F

ge

ein

kö

Le

---

teil

an

ven

S. 2

He

Ph

S. 2

vor

bez

1. Um  
meta

(A

U

dampf  
über  
sehr  
durch  
nahme  
gewies  
zu be  
durch  
angele  
Messu  
Flamm  
gelegt  
eindeut  
können  
Leitfä

1)

teilweis  
2)  
an Stell  
verbund

3)

R. 55. 1

4)

Horren  
Phil. M  
R. 43. 1  
vorgang  
sichere

Assa



# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 74.

## 1. Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit metaldampfhaltiger Flammen mit Einführung einwandfreier Feldmessungen<sup>1)</sup>;

von Ernst Zachmann.

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

Untersuchungen der elektrischen Leitfähigkeit metaldampfhaltiger Flammen mit dem Zweck, Aufschluß zu erhalten über die Art des Elektronen liefernden Vorganges, sind schon sehr frühzeitig in Angriff genommen worden.<sup>2)</sup> Die bisher durchgeführten Leitfähigkeitsmessungen leiden aber fast ausnahmslos — worauf zuerst Hr. Lenard nachdrücklich hingewiesen hat<sup>3)</sup> — an dem Fehler, daß man die Leitfähigkeit zu bestimmen suchte aus dem Zusammenhang zwischen dem durch die Flamme fließenden Strom und dem an die Elektroden angelegten Spannungsunterschied statt dem nur durch besondere Messungen feststellbaren, tatsächlich wirksamen Feld<sup>4)</sup> im Flammeninnern, das nur bis zu einer gewissen Grenze der angelegten Spannung proportional und aus dieser auch gar nicht eindeutig berechenbar ist. Elektrodenspannung-Strom-Kurven können daher im allgemeinen nicht einmal relativ richtige Leitfähigkeiten ergeben, erlauben also keine brauchbaren

1) Auszug aus der Heidelberger Dissertation vom 27. April 1923. teilweise erweitert.

2) Über die Benutzung von Wanderungsgeschwindigkeitsmessungen an Stelle der Leitfähigkeitsmessungen zum gleichen Zweck und die damit verbundenen Schwierigkeiten siehe Teil IV des Vorliegenden.

3) P. Lenard, Heidelberger Akademie der Wissenschaften A. 17. S. 55. 1914.

4) Eine Ausnahme bilden nur die Leitfähigkeitsmessungen der Herren E. Warburg, Ann. d. Phys. 2. S. 301. 1900; H. A. Wilson, Phil. Mag. (6) 10. S. 476. 1905 und E. Gold, Proc. Roy. Soc. A. 79. S. 43. 1907, die aber für die Frage nach dem Elektronenbefreiungsvorgang nicht in Betracht kommen, da sie sich auf die reine Flamme beziehen.

Schlüsse. Wir werden auch zeigen, daß die Abhängigkeit des wirksamen Feldes von der Elektrodenspannung von Metall zu Metall verschieden sein kann, was sogar Vergleichsmessungen mit verschiedenen Metallen ganz unbrauchbar machen kann.<sup>1)</sup>

Ferner ist bei Verwendung von glühenden Platinblechen oder -Netzen als Elektroden (wie bisher ausnahmslos geschehen) der durch die Flamme fließende Strom in verwickelter Weise beeinflußt durch die am glühenden, festen Metall sich abspielenden Vorgänge, wodurch leicht der Elektronenbefreiungsvorgang im Innern der Flamme verdeckt und unerkennbar gemacht werden kann.

Es erschien daher notwendig, einmal die elektrische Leitfähigkeit metaldampfhaltiger Flammen durch gleichzeitige Strom- und Feldmessung zu bestimmen und zwar unter Anschaltung der Elektrodenwirkung, indem an Stelle der Platinnetzelektroden gekühlte Elektroden verwendet wurden, bei denen mit Sicherheit jede Elektronenbefreiung oder Trägerbildung an der Oberfläche vermieden ist.<sup>2)</sup>

Ferner war die Aufmerksamkeit besonders zu richten auf einwandfreie Strom- und Feldmessungen. Wie sehr hierbei besonders die Feldmeßweise erst ganz neuer Bearbeitung bedurfte, um genügend fehlerfrei zu werden, zeigte sich erst im Verlauf der Arbeit selbst. Die bisher üblich gewesenen, durchweg in der Literatur benutzten Sondenmessungen sind ohne Untersuchung der der Sondenwirkung zugrunde liegenden Vorgänge angestellt worden und daher, wie wir zeigen, mit teilweise recht beträchtlichen — Fehlern behaftet.

Um die Meßergebnisse in möglichst einfacher Weise in bezug auf Leitfähigkeit deuten und zu Schlüssen verwerten zu können, müssen für die Wahl der Versuchsanordnung gewisse Bedingungen<sup>3)</sup> erfüllt sein, die sich ergeben aus folgender, an die theoretische Bearbeitung der Flammenleitung durch Hrn. Lenard<sup>4)</sup> sich anschließenden Überlegung über den Zu-

1) Vgl. hierzu Teil III des Vorliegenden.

2) Man vgl. zu allen hier vorliegenden Fragen auch Hrn. A. Beckers Bericht über Flammenleitung in Graetz, Handbuch d. El. u. d. Magn. Bd. III. S. 460. 1919.

3) Vgl. hierzu Teil I, 2.

4) Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 34. S. 6. 1911 und A. 17. S. 6ff. 1914

sammenhang von Feldstärke und Stromdichte und über die Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Elektronenbefreiungsvorgang. Es bedeute:

- $Z_e$  die in der Zeit- und Raumeinheit freiwerdende Zahl von Elektronen (bzw. positiven Elektrizitätsträgern),  
 $Z_n$  die in der Zeit- und Raumeinheit durch Wiedervereinigung verschwindende Elektronenzahl,  
 $n$  die Zahl der Metallatome in der Raumeinheit,  
 $n \cdot \beta$  die Zahl der gleichzeitig positiv geladenen Metallatome in der Raumeinheit,  
 $Q$  die Zahl der gleichzeitig vorhandenen wanderungsfähigen Elektronen in der Raumeinheit,  
 $c_q$  die Zahl der Zusammentreffen eines Elektrons mit positiven Trägern in der Zeiteinheit, dividiert durch deren Anzahl in der Raumeinheit,  
 $r$  den Bruchteil dieser Zusammentreffen, der zu Wiedervereinigung führt.

Dann ist:

$$(1) \quad Z_n = c_q \cdot r \cdot n \cdot \beta \cdot Q$$

und im Gleichgewichtszustand in der feldfreien Flamme:

$$(2) \quad Z_e = Z_n.$$

Liegt ein Feld an der Flamme, so erfolgt Elektronenverlust des betrachteten Raumteils außer durch Wiedervereinigung auch noch dadurch, daß bei etwaiger Divergenz des Feldes mehr Elektronen aus- als einwandern können. Wird die Zahl der in dieser Weise in der Zeiteinheit durch Fortführung verschwindenden Elektronen mit  $Q_F'$  bezeichnet, so ergibt sich:

$$(3) \quad Z_e = Z_{nF} + Q_F' = c_q r n \cdot \beta_F \cdot Q_F + Q_F'.$$

Die Stromdichte beim Feld  $F$  ist nun gegeben durch:

$$(4) \quad J_F = e \cdot w \cdot F \cdot Q_F,$$

wo  $w$  die Wanderungsgeschwindigkeit der Elektronen im Einheitsfeld ist und  $Q_F$  aus Gl. (3) zu berechnen ist.

Dies läßt sich ausführen, wenn nun noch die Annahme gemacht wird, daß die Flamme als Ganzes elektrisch neutral ist, so daß gesetzt werden kann:  $n \beta_F = Q_F$ , wodurch Gl. (3) die Form erhält:

$$(5a) \quad Z_e = c_q \cdot r \cdot Q_F^2 + Q_F',$$

woraus folgt:

$$(5) \quad Q_F = \sqrt{\frac{Z_s - Q_F'}{c_q \cdot r}},$$

also

$$(6) \quad J = e \cdot w \cdot F \cdot \sqrt{\frac{Z_s - Q_F'}{c_q \cdot r}}.$$

Die Lösung der Gleichung ist einfach für den Fall, daß  $Q_F'$  gegenüber  $Z_s$  sehr klein ist, so daß es vernachlässigt werden kann. Dieser Fall ist gegeben bei sehr kleinem Feld, und die sich nun ergebende Gleichung:

$$(6a) \quad J_F = e \cdot w \cdot F \cdot \sqrt{\frac{Z_s}{c_q \cdot r}}$$

nähert sich der Wirklichkeit um so besser, je kleiner das Feld ist. Für die Feldstärke Null wird durch sie die Tangente an die Feldstromkurve im Nullpunkte bestimmt, deren Neigung die Leitfähigkeit der Flamme ergibt.

Es ist nun noch über die Zuordnung der gemessenen Feldstärke zur Stromdichte folgendes zu sagen: Die Feldstärke ist in der Flamme nicht gleich groß über die ganze Länge der Strombahn, sondern sie ändert sich längs dieser, auch wenn sie bei Abwesenheit der Flamme konstant wäre. An welcher Stelle der Strombahn das Feld zu messen und in Gl. (6a) einzusetzen ist, ergibt sich bei Berücksichtigung der zur Herleitung dieser Gleichung gemachten Annahme, daß die Flamme in dem betrachteten Raumteil als elektrisch neutral anzusehen, also  $n \cdot \beta = Q$  ist, mit anderen Worten, daß keine überschüssigen freien Ladungen vorhanden sind. Die Feldstärke hängt nun von der Anzahl dieser freien Ladungen in folgender Weise ab: Befinden sich zwischen den Elektroden gar keine freien Ladungen, so ist das Feld an allen Punkten gleich stark und gegeben durch den Spannungsunterschied der Elektroden und ihren Abstand, und es ist die Dichte der Kraftlinien überall gleich groß. Befindet sich aber zwischen den Elektroden eine freie Ladung, so läuft eine Kraftlinie von ihr zu derjenigen Elektrode, deren Spannung entgegengesetztes Vorzeichen hat. Es ist also zwischen dem Ort der Ladung und der Elektrode die Kraftliniendichte größer als zwischen diesem Ort und der anderen Elektrode; die freie Ladung be-

Elektris

dingt e  
Dichte  
und ne  
konstan  
wie lei  
Feld in  
aufweis  
die Ger  
teil, da  
der Uz  
Mindest  
untersch  
findlich

Di  
Im  
freie ex  
haltigen  
eigmeten  
Im  
glühend  
unterzo  
werden  
aufged  
Im  
dampf  
Verwer  
Zusamm  
Atomg  
Im  
teils S  
der Fla  
Arbeits

Di  
flamme  
fr d

dingt eine Änderung der Feldstärke. An der Stelle, wo die Dichte der freien Ladung Null ist, d. h. wo gleich viel positive und negative Ladungen vorhanden sind, muß die Feldstärke konstant sein und zwar muß sie einen Mindestwert aufweisen, wie leicht einzusehen ist. Die Beobachtung zeigt, daß das Feld im Innern der Flamme in der Tat einen Mindestwert aufweist, dessen Betrag also in Gl. (6a) einzusetzen ist. Für die Genauigkeit der Feldmessung ist es von besonderem Vorteil, daß bei kleinen Feldern die Änderung des Feldwerts in der Umgebung der Minimumstelle so gering ist, daß der Mindestwert mit großer Sicherheit durch Messung des Spannungsunterschiedes zweier in einiger Entfernung voneinander befindlichen Punkte bestimmt werden kann.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in vier Teile:

Im ersten Teil werden die Bedingungen für einwandfreie experimentelle Bestimmung der Leitfähigkeit metaldampfhaltiger Flammen untersucht und zur Auffindung einer geeigneten Versuchsanordnung angewandt.

Im zweiten Teil wird die Feldmeßweise mit Verwendung glühender Drähte als Sonden einer kritischen Untersuchung unterzogen und eine einwandfreie Methode begründet. Es werden außerdem die Fehlerquellen bei der Strommessung aufgedeckt und die genaue Strommessung sichergestellt.

Im dritten Teil werden die Leitfähigkeiten von metaldampfhaltigen Flammen verschiedenen Metallgehalts und bei Verwendung verschiedener Alkalimetalle gemessen und die Zusammenhänge zwischen Leitfähigkeit und Metallkonzentration, Atomgewicht und Flammentemperatur festgestellt.

Im vierten Teil werden aus den Ergebnissen des dritten Teils Schlüsse gezogen auf die Art der Elektronenbefreiung in der Flamme und die vorliegenden Ergebnisse mit denen früherer Arbeiten verglichen.

## I. Teil.

### Die Versuchsanordnung.

#### 1. Erzeugung und Regelung der Flamme.

Die Untersuchungen wurden zumeist in einer Leuchtgasflamme, teils aber auch in einer Alkoholflamme durchgeführt. Für die Vorversuche wurde das Leuchtgas der städtischen

Leitung direkt entnommen. Da Beschaffenheit und Druck des Gases oft sehr stark schwankten, wurde für die endgültigen Versuche ein Vorratskessel benutzt, in dem das Leuchtgas bis zu einem Druck von 10 Atmosphären verdichtet war und von wo aus es dem Brenner zugeführt wurde. Die Versuche mit Alkoholflammen sollten Aufschluß geben über den Einfluß der Zusammensetzung der Flammengase auf die Elektronenbefreiung in der Flamme. Die zur Erzeugung eines gleichmäßigen Alkoholdampfstromes dienende Einrichtung ist auf S. 9 und 10 der Dissertation ausführlich beschrieben. Als Brenner für beide Flammenarten erwies sich nach Vorversuchen ein geeigneter umgebauter Mekerbrenner als günstig. Aus Fig. 1 ist die Art der Gas- und Luftzuführung zu ersehen (vgl. auch Diss.).



Fig. 1.

Der Druck des Leuchtgases wurde mit einem Wassermanometer gemessen. Im Verlaufe der Untersuchung stellte sich heraus, daß die Messung des Gasdrucks mit einer Genauigkeit von mindestens 1 v. H. geschehen mußte, um den Einfluß von Druckschwankungen auf die Feldmessungen ausschalten bzw. vermindern zu können. Es ergab sich nämlich bei den kleinsten angewandten Feldstärken und dem meistens verwandten Abstand der zur Feldmessung dienenden Sonden bei einer Druckänderung von 5 v. H. eine Änderung des Feldes um etwa 20 v. H. Dazu kam noch der durch die Schwankungen des zum Betrieb des Zerstäubers notwendigen Luftstromes verursachte Fehler der Feldmessung, der prozentual etwa die Hälfte betrug. Da der ganze Druck des Gases nur etwa 6–8 mm Wassersäule betrug, mußte die Manometerempfindlichkeit vergrößert werden.

Sehr gut bewährte sich die Einrichtung eines gewöhnlichen Wassermanometers für Lichtzeigerablesung. Die Hebung bzw. Senkung der Wasseroberfläche wird hierbei durch eine auf einer schwimmenden Korkscheibe mittels Faden und Rolle auf einer Achse der letzteren befestigten Hohlspiegel übertragen, der das Bild eines Glühlampenfadens auf eine Skala entwirft. Diese ist zu einem Kreisbogen von etwa 150 cm Krümmungsradius zusammengebogen und so aufgestellt, daß der Drehspiegel sich im Krümmungsmittelpunkt befindet. Die Empfind-

lichkeit ist etwa 165 fach. Ein Gasdruck von 8,0 mm gibt also einen Ausschlag von etwa 132 cm; da sich 0,5 cm noch bequem ablesen läßt, beträgt also die Genauigkeit etwa  $\frac{1}{3}$  v. H.

Die Messung des Drucks des zum Betrieb des Zerstäubers dienenden Luftstromes konnte, da er 80—100 cm Wassersäule betrug, mittels eines Wassermanometers leicht auf  $\frac{1}{3}$  v. H. genau ausgeführt werden. Der Luftstrom wurde aus der Druckanlage des Instituts entnommen. Da er infolge des periodischen Arbeitens der Druckluftmaschine schwankte, wurde durch Absprudelnlassen eines Teils der Luft Gleichmäßigkeit des Druckes hergestellt. Zur Ausgleichung der vom Sprudeln herrührenden Stöße war in die Luftleitung ein großer Kessel eingeschaltet. Die Dämpfe und Verbrennungsprodukte der Flamme wurden durch eine bis über diese geführte weite Leitung mit Hilfe eines Ventilators abgesaugt und aus dem Zimmer ins Freie befördert.

## 2. Die Elektrodenanordnung.

### A. Grundsätzliches zur Einwandfreiheit der Anordnung.

Für die Wahl der Elektrodenanordnung sind folgende Bedingungen maßgebend, die sich aus der in der Einleitung durchgeführten Überlegung ergeben.

a) Der ganze Strom, der durch die eine Elektrode in die Flamme eintritt, muß durch die andere Elektrode wieder ausreten. Es darf nicht etwa ein Teil des eingetretenen Stromes auf Nebenwegen hinausgeleitet werden (etwa durch die an die Flamme angrenzenden Luftschichten zu irgendwelchen in der Nähe befindlichen Leitern). Die Prüfung hierauf siehe unter B. b) (weiter unten).

b) Die in der Einleitung durchgeführten Betrachtungen beziehen sich auf die Stromdichte, also auf den durch die Flächeneinheit einer senkrecht zur Stromrichtung liegenden Ebene durchtretenden Strom. Um also aus dem gesamten, durch die Ebene der Elektrode hindurchgehenden Strom die Stromdichte berechnen zu können, muß die Elektrode einen scharf begrenzten und genau bestimmbaren Querschnitt besitzen. Das ist zu erreichen durch Verwendung einer Schutzringanordnung, wobei darauf zu achten ist, daß nur die in der



Elektrodenoberfläche gelegenen Flächen der Elektrode für die Stromab-(zu)leitung in Frage kommen. Außerdem muß aber auch die Stromdichte überall in dieser Ebene gleich sein. Das läßt sich leicht prüfen durch Messen der durch Innenelektrode und Schutzring durchgehenden Ströme und ihre Vergleichung unter Berücksichtigung der Flächengrößen. Gleichheit des Stromverhältnisses mit dem Flächenverhältnis zeigt Gleichheit der Stromdichte in der ganzen Ebene an und gibt die Berechtigung zur Ermittlung der Stromdichte aus dem durch die Innenelektrode ab(zu)geleiteten Strom und der Fläche dieser Elektrode.

c) Damit aus der so für die Elektrodenoberfläche ermittelten Stromdichte und dem im Innern der Flamme gemessenen Feld die Leitfähigkeit der Flamme berechnet werden kann, muß die für die Elektrodenoberfläche festgestellte Konstanz der Stromdichte auch für jeden anderen ihr parallelen Querschnitt der Flamme gelten. Das läßt sich nun zwar nicht direkt erweisen (wodurch die Genauigkeit absoluter Bestimmungen der spezifischen Leitfähigkeit der Flamme etwas verringert wird), durch Verwendung einer geeignet begrenzten möglichst homogenen Flamme jedoch jedenfalls sehr nahe verwirklichen. Nach den Untersuchungen von Frl. H. Kohn<sup>1)</sup> bietet nun der Mekerbrenner eine in bezug auf die Temperaturverteilung sehr gleichförmige Flamme, wenn diese scharf begrenzte, nicht seitlich ausgewölbte Ränder hat. Daß dies auch bei der im Vorliegenden verwendeten Flamme (bei der auf scharfe Begrenzung geachtet wurde) tatsächlich sehr weitgehend der Fall war, zeigen die im III. Teil angeführten Feldmessungen längs eines Horizontalschnittes durch die Flamme, die innerhalb der Versuchsfehler Gleichheit des Feldes fast über die ganze Flammenbreite ergaben, woraus auf Gleichheit des Leitvermögens, also auch der Stromdichte, sich schließen läßt.

d) Die Zulässigkeit der Berechnung der Leitfähigkeit aus der Feldstärke ist ferner noch gebunden an die Bedingung, daß das Feld gemessen wird an dem Ort, wo die Flamme elektrisch neutral ist, wo also das Feld einen Mindestwert hat. Das Vorhandensein eines solchen Feldmindestwerts muß

1) Diss. Breslau. 1911.



also als dritte Bedingung für die Brauchbarkeit einer Elektrodenanordnung durch besondere Untersuchung des Spannungsverlaufs zwischen den Elektroden als erfüllt nachgewiesen werden.

e) Zu diesen für Leitfähigkeitsbestimmungen unter allen Umständen geltenden Bedingungen kommt für die vorliegende Untersuchung als Sonderbedingung noch die hinzu, daß an den Elektroden (oder wenigstens an einer von ihnen) die Möglichkeit von Elektronenerzeugung durch Zusammenwirken des Elektrodenstoffes mit den Flammgasen oder durch Glühendwerden des Elektrodenmetalls ausgeschlossen ist.

## B. Verwirklichung der Einwandfreiheit

### a) Ausschaltung von Elektronenbefreiung oder Trägerbildung an der Elektrode.

Umfangreiche Voruntersuchungen<sup>1)</sup> zeigten, daß die vorstehenden Bedingungen für die Brauchbarkeit der Elektrodenanordnung nicht erfüllt sind, wenn der Brenner in der Anordnung einen Fremdkörper darstellt. Er muß daher mit einbezogen werden in der Weise, daß seine Mündungsfläche die eine Elektrode bildet. Aus technischen Gründen (Bestimmung der Flammengeschwindigkeit) mußte die Anordnung so getroffen werden, daß die Mündungsfläche und die ihr gegenüberstehende Elektrode wagrechte Lage haben, wobei durch geeignete Gestaltung dieser oberen Elektrode dafür gesorgt werden mußte, daß Form und Geschwindigkeit der Flamme möglichst wenig beeinflußt werden.

Was die Trägerbildung — als welche in unserem Falle Elektronenbefreiung maßgebend ist — an den Elektroden anlangt, so ist bekannt, daß an der unteren Elektrode, nämlich der Brennerfläche, der blaue Konus wesentliche Elektronenquelle ist.<sup>2)</sup> Dieser Konus ist beim Mekerbrenner in viele kleine ganz niedrige Teile gespalten, die eine dünne Schicht dicht an der Brennerfläche bilden. Um diese Elektronenquelle auszuschalten, mußte bei allen Leitfähigkeitsmessungen der Brenner Anode sein. Es handelt sich dann nur darum,

1) Vgl. Diss. S. 13—20.

2) Nach Beobachtungen Hrn. F. Maxwells, zitiert bei Hrn. P. Lenard, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 17. S. 8. Anm. 9. 1914; vgl. übrigens auch besondere Messungen in der Diss.

Elektronenbefreiung an der oberen Elektrode (Kathode) ganz zu verhindern. Es wurde dazu die Elektrode für Wasserkühlung<sup>1)</sup> eingerichtet in folgender Form:

Die innere, mit dem Galvanometer zu verbindende Elektrode bestand (vgl. Fig. 2) aus einem Messingrohr *a*, in das am einen Ende ein kupfernes Schlußstück *K* hart eingelötet ist. Auf dieses Kupferstück strömt aus einer mit einem Wasserbehälter *b* in Verbindung stehenden Düse das Kühlwasser, das dann erwärmt im Rohre *a* aufsteigt und durch ein zweites Verbindungsrohr wieder nach *b* zurückströmt usw. — Der Schutzring hat eine solche Form, daß eine Berührung der Innenelektrode durch die Flamme nur an ihrer unteren Fläche stattfinden kann, deren Radius

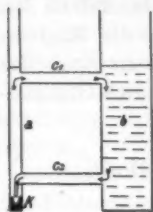


Fig. 2.

im Mittel 5,5 mm, deren Größe also 0,95 cm<sup>2</sup> ist. Aus 15 mm hohen, 1,5 mm starken Kupferblechstreifen ist ein das untere Ende der Innenelektrode mit etwa 1 mm Zwischenraum umfassender Kreiszyylinder zusammengebogen in der aus Fig. 3 ersichtlichen Weise. Durch weitere, 10 mm hohe Streifen wird das Gitter vervollständigt. Ein über der einen Hälfte schwach geneigt verlaufender Streifen schützt den Querarm der Innenelektrode vor Berührung durch die Flamme. Die Streifen sind mit ihren Enden in die Wände zweier Kühlwasserkessel eingelötet, die zwischen sich einen Raum von etwa 25 mm Breite freilassen. Die Aufstellung der Gitterelektrode geschieht auf einem Dreifuß durch Vermittlung von Flintglasstützen. Die Innenelektrode ist auf einem neben der Flamme angebrachten Isolierschemel mit Bernsteinfüßen aufgestellt.

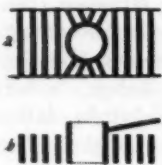


Fig. 3.

#### b) Prüfung der Elektrodenanordnung.

Tabelle 1 (Galvanometer zwischen Spannungsquelle und Elektrode) zeigt, daß die Bedingung A. a) bezüglich der Stromverhältnisse und der Isolation der Elektroden erfüllt ist.

1) Vorversuche (vgl. Diss. S. 20 ff.) hatten gezeigt, daß selbst bei ganz schwachem Glühen der Elektrode an ihr Träger gebildet werden.

2) 3 a im Grundriß, 3 b im Querschnitt.

Tabelle 1.

Elektrodenspannung Volt	Strom Skalenteile	Schaltung
- 100 + 100	2,1 300,0	} Brenner geerdet
- 100 + 100	0,4 0,8	
		} Brenner isoliert

Auch ergaben sich bei Schaltung des Galvanometers einmal zwischen Spannungsquelle und Brenner, das andere Mal zwischen Spannungsquelle und Elektrode, immer die gleichen Ströme. Zugleich zeigt Tab. 1 (erste Zeile) die genügende Kühlung der Elektrode (Erfüllung der Bedingung A. e).

Zur Prüfung auf Schutzringwirkung bzw. auf Gleichmäßigkeit der Stromdichteverteilung über den Elektrodenquerschnitt (A. b) wurde mittels einer Wippe das Galvanometer abwechselnd an die Innenelektrode und an das Gitter gelegt und das Verhältnis der beiden Ströme bestimmt. Es ergab sich gute Schutzringwirkung bei Elektrodenspannungen bis zu 3000 Volt, wie Tab. 2 zeigt.

Tabelle 2.

Angelegte Spannung Volt	Strom an	
	Ring Skalenteile	Innenelektrode Skalenteile
550	284,0	77,3
1000	339,0	87,3
2000	468,0	116,0
3000	498,0	127,0

Das Verhältnis der Ströme (1:4) entspricht dem der Flächen recht gut. (Fläche der Innenelektrode = 100 mm<sup>2</sup>; Fläche des Schutzrings = (500 - 100 mm<sup>2</sup>.) Zu bemerken ist, daß die ganze für die Stromleitung wirksame Schutzringfläche von der Flamme bespült war.

#### c) Untersuchung des Spannungsverlaufs.

Es war nun noch zu prüfen, ob die Bedingungen A. c) und A. d) erfüllt sind. Zu diesem Zwecke wurde bei ver-

schiedenen Elektrodenspannungen der Spannungsverlauf in der Flamme untersucht. Daraus mußten sich dann auch Fingerzeige für die feinere Ausführung von Feldmessungen ergeben. Rohe Messungen des Spannungsverlaufes mit einer Sonde und Braunschem Elektrometer zeigten von der Anode aus bis weit in die Flamme hinein ein kleines Gefälle, das dann rasch in das sehr starke Kathodengefälle übergeht. Zu genauere Bestimmung des Feldes im Flammeninnern und zur Entscheidung der Frage nach dem Vorhandensein des Feldminimums mußte ein Instrument von größerer Empfindlichkeit

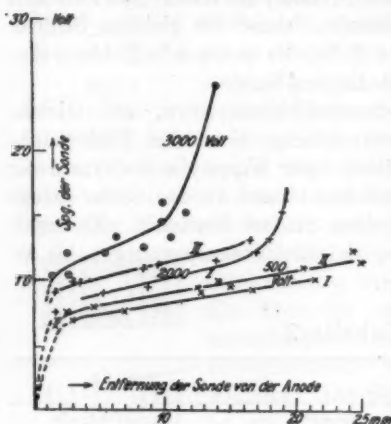


Fig. 4.

zur Spannungsmessung verwendet werden; es wurde hierzu ein Einfadenelektrometer gewählt. Um seine hohe Empfindlichkeit ausnutzen zu können und außerdem, um es nicht durch zu hohe Spannung zu gefährden, wurde bei diesen Versuchen die (negative) Spannung an die obere Elektrode gelegt, so daß in der Nähe des geerdeten, als Anode dienenden Brenners nur Spannungen von der Größenordnung von einzelnen Volt auftraten.<sup>1)</sup> Die Spannungskurven (Fig. 4) zeigen zunächst, daß das Feld tatsächlich einen Mindestwert besitzt, dessen Betrag selbst bei sehr hohen Elektrodenspannungen sehr klein ist — er ergibt sich z. B. bei 3000 Volt Elektrodenspannung aus der Neigung der Kurve zu etwa 0,3 Volt/cm. Entsprechend ergibt sich für 2000 Volt etwa 0,25 Volt/cm, für 500 Volt Elektrodenspannung etwa 0,18 Volt/cm. Diese Werte sind, wie ja ein Blick auf die Kurven lehrt, nur als der Größenordnung nach richtig anzusehen. Sie zeigen aber sehr deutlich,

1) Der Abstand der Elektrode vom Brenner war 40 mm.

daß das Feld durchaus nicht direkt proportional der Elektroden-  
spannung zunimmt, sondern bei hohen Spannungen, z. B. bei  
Erhöhen von 2000 Volt auf 3000 Volt, weniger stark wächst  
als bei niedrigen Spannungen. Bei 3000 Volt Elektroden-  
spannung ist das Minimum ziemlich schmal; je geringer die  
Elektrodenspannung ist, um so größer ist der Bereich in der  
Umgebung des Minimums, innerhalb dessen das Feld als  
praktisch konstant gleich dem Minimum angesehen werden  
darf; bei 500 Volt Elektrodenspannung nimmt er etwa  $\frac{2}{3}$  des  
Elektrodenabstandes ein. Für die Ausführung von Leitfähig-  
keitsmessungen ergibt sich hieraus: Zunächst muß die Feld-  
messung direkt durch Messung der Spannungsdifferenz zweier  
in bekanntem Abstand voneinander sich in der Flamme be-  
findenden Punkte geschehen, statt wie hier durch Verschieben  
einer Sonde und nachherige graphische Differentiation der  
Spannungskurve, weil dieses Verfahren infolge der unvermeid-  
lichen zeitlichen Schwankungen des Flammenzustandes mit  
ziemlich großer Unsicherheit behaftet ist. Dann können aber  
auch nur verhältnismäßig niedrige Elektrodenspannungen be-  
nutzt werden, bei denen das Feld im Flammeninnern über  
einen größeren Bereich praktisch konstant ist (was natürlich  
vor Ausführung der Leitfähigkeitsmessungen für die jeweils  
vorliegenden Verhältnisse geprüft werden muß). Mit der Durch-  
bildung der Feldmeßweise mit Doppelsonde zu einwandfreier  
und genauer Feldmessung befaßt sich der folgende Teil.

## II. Teil.

### Feld- und Strommeßweise bei kleinen Feldern.

#### 1. Bemerkungen über die Wirkung der Sonden.

Bei der Ausmessung elektrischer Felder in leitenden  
Gasen mit Hilfe von Sonden sind zwei Fragen von großer  
Wichtigkeit, die sich auf die Beeinflussung der Spannungs-  
verteilung durch die Sonden und auf die Wiedergabe von  
Spannungen durch Sonden beziehen. Bringt man in einen  
mit Trägern erfüllten Feldraum einen ausgedehnten Leiter  
etwa von zylindrischer Form so, daß die Achse des Zylinders  
den Flächen gleicher Spannung parallel läuft, so liegen die  
Punkte seines Umfangs an Orten, die in dem sondenlosen

Gas verschiedene Spannungen haben. Nimmt man nun zunächst zur Vereinfachung an, daß man der Grenzfläche des Gases gegen die Sonde eine mittlere Spannung zuschreiben kann, so handelt es sich darum, zu entscheiden, ob:

1. die Sonde — etwa ein glühender Platindraht, wenn man Feldmessungen in Flammen durchführt — diese mittlere „Spannung des Sondenorts“ (wie die Spannung der Grenzfläche oder -Schicht zur Abkürzung genannt sei) richtig am Elektrometer wiedergibt,

2. die mittlere Spannung des Sondenorts übereinstimmt mit der bei Abwesenheit der Sonde am Ort der Sondenmittellinie herrschenden Spannung.

Es wird nun in den nachfolgenden Abschnitten gezeigt werden, daß:

1. die Sondenmessung mit glühenden Sondendrähten bei Berücksichtigung der durch die Eigenart der Sonden bedingten besonderen Verhältnisse geeignet ist, die Spannung des Sondenorts (wie oben definiert) richtig wiederzugeben (Abschnitt 2, I), und es werden die Wege angegeben, auf denen dies sowie eine einwandfreie Strommessung gewährleistet ist (2, II).

2. Ferner wird durch vergleichende Messungen mit Sonden verschiedener Form und Einführungsart gezeigt, daß die mit geeigneten Sonden gemessene Spannung des Sondenorts der wirklichen Spannung bei Abwesenheit der Sonde sehr nahe kommt (Abschnitt 3).

Die Untersuchung der ersten Frage geht aus von folgender Überlegung: Der glühende Sondendraht sendet Elektronen aus, er muß sich also positiv aufladen. Außerdem können Thermoelemente an ihm auftreten, etwa da, wo er aus der Flamme austritt, wo also ein starkes Temperaturgefälle in ihm herrscht oder auch an den Verbindungsstellen mit anderem Metall. Diese Spannungen müssen die Angaben der Sonde beeinflussen und am Elektrometer mit zur Messung kommen. Es sei  $A$  die unabhängig vom Feld in Gestalt von glühelektrisch abgegebenen Elektronen in der Zeiteinheit durch die Oberfläche des Sondendrahtes in der Richtung von innen nach außen hindurchtretende Elektrizitätsmenge. Infolge der durch die Abgabe negativer Ladung bedingten positiven Aufladung wird die Sonde wieder Elektronen aus der Flamme zu sich heranziehen.

ziehen und zwar vorzugsweise aus ihrer nächsten Umgebung. Da nämlich die mit geringen Geschwindigkeiten aus der Sonde austretenden Elektronen schon nach kurzem Lauf in der Flamme absorbiert werden, dadurch aber ihre Eigengeschwindigkeit einbüßen und zu negativen Trägern werden, befindet sich um die Sonde herum ein Gebiet, in dem die Konzentration der negativen Träger (wazu noch von den Flammenmolekülen wieder freigewordene Elektronen kommen) sehr groß und jedenfalls beträchtlich größer ist als in den weiter von der Sonde entfernten Flammteilen. Der mittlere Spannungsunterschied  $P$  der Sonde gegen die (natürlich etwas verwaschene) Grenze dieses Gebiets wird daher bestimmend sein für die Wiederaufnahme negativer Ladungen durch die Sonde, so daß aus diesem Bereich ein negativer Strom  $J = P \cdot c$  zur Sonde hinfließt, wobei  $c$  der Leitfähigkeit des Bereichs proportional sein muß.  $P$  muß infolge der Elektronenabgabe der Sonde so lange wachsen, bis Gleichgewicht der beiden Strömungen erreicht ist, d. h. bis  $E_0 = c \bar{P}$ , woraus für die endgültige Aufladung  $\bar{P}$  der Sonde gegen den Sondenort folgt:

$$\bar{P} = \frac{E_0}{c}.$$

Hat bei Anlegen eines Feldes an die Flamme der Sondenort die mittlere Spannung  $V$ , so muß an dem mit der Sonde verbundenen Elektrometer als Sondenspannung der Betrag:

$$P_{\text{Sonde}} = \frac{E_0}{c} + V$$

gemessen werden, wozu noch (vom Feld unabhängig) ein Thermopotential  $P_{\text{th}}$  kommen kann, so daß

$$P_{\text{Sonde}} = P_{\text{th}} + \frac{E_0}{c} + V.$$

Ein ebensolcher Ausdruck ergibt sich für die zweite Sonde, so daß bei Verbinden beider Sonden mit den beiden Elektrometerhälften für ihren Spannungsunterschied am Elektrometer gemessen wird:

$$(P' - P'') = \Delta P = (P_{\text{th}}' - P_{\text{th}}'') + \frac{1}{c} (E_0' - E_0'') + (V' - V'').$$

1. Ist nun  $c$  von der Feldstärke unabhängig (vgl. die folgende Prüfung), so ist stets die Sondenspannung:

$$P_{\text{Sonde}} = \text{„Eigenspannung“} + \text{Spannung des Sondenorts},$$



d. h. die Spannungen an der Sonde lagern sich übereinander und addieren sich. Dabei ist „Eigenspannung“ die Spannung der Sonde, wenn die Spannung des Sondenorts Null ist. Bezüglich des „Eigenspannungsunterschieds“ der Sonden kann angenommen werden, daß er entweder Null ist (1 a), oder daß er einen von Null verschiedenen Wert besitzt (1 b).

2. Bei Abhängigkeit der Größe  $c$  vom Feld wäre dagegen

$$\text{mit Feld: } \Delta P_F = \Delta V_F + (P_{th}' = P_{th}'') + \frac{1}{c_F} (E_0' - E_0''),$$

$$\text{ohne Feld: } \Delta P_0 = (P_{th}' - P_{th}'') + \frac{1}{c_0} (E_0' - E_0'').$$

Subtraktion ergibt:

$$\Delta P_F - \Delta P_0 = \Delta V_F + (E_0' - E_0'') \frac{c_0 - c_F}{c_0 \cdot c_F},$$

also zu große oder zu kleine Werte für  $\Delta V$ .

Bei den bisher in der Literatur beschriebenen Sondenmessungen, die in Abschnitt 4 dieses Teiles im Einzelnen besprochen werden, ist stillschweigend immer eine der oben unter 1 erwähnten Möglichkeiten angenommen, jedoch nie eine Nachprüfung der Zulässigkeit solcher Annahmen vorgenommen worden. Eine Ausnahme bildet die Untersuchung des H. Wilckens<sup>1)</sup>, der die Zuverlässigkeit der Glühsonde dadurch prüfte, daß er bei demselben Elektrodenspannungsunterschied (also gleicher Spannungsverteilung), jedoch verschiedenen Absolutwerten und Vorzeichen die Spannungsverteilung aufnahm. Aus der Gleichheit der erhaltenen Verteilungskurven schloß er, daß die Sonde Spannungen beiderlei Vorzeichens gegenüber sich gleich verhält, d. h. daß die oben von uns gemachte Annahme der Überlagerung der Spannungen an der Sonde zutrifft.<sup>2)</sup> Im Verlauf der vorliegenden Arbeit zeigte sich dies bestätigt, zugleich aber eine noch eingehendere Prüfung der Sondenwirkung notwendig; die dazu unternommenen Versuche sind in den beiden folgenden Abschnitten beschrieben.

1) Diss. Hdbg. S. 9 u. 10. 1914.

2) Eine Untersuchung der Sondenmeßweise in bezug auf die Beeinflussung der Spannung des Sondenorts durch die Sonde (also in bezug auf die im Abschnitt 1 unter 2 aufgeworfene Frage) ist bisher überhaupt noch nicht vorgenommen worden.



## 2. Experimentelle Untersuchung der Sondenwirkung und Ausarbeitung der Strom- und Feldmeßweise zu feinen Messungen.

## I. Nachweis der Überlagerung der Spannungen an der Sonde.

Zur Messung der Felder wurden zwei Sonden verwendet, die aus 5 mm langen, 0,1 mm dicken Platindrähtchen bestanden, die an den Enden zweier 0,5 mm dicker Platindrähte angeschweißt waren. Sie waren mit einem Binantelektrometer von einer Empfindlichkeit von 1100  $\frac{\text{Skalenteilen}}{\text{Volt}}$  verbunden.<sup>1)</sup>

Da sich ein starker Einfluß der von Änderungen des Gasdrucks herrührenden Flammenschwankungen auf die Angaben der Sonden geltend machte, wurde das in Teil I, S. 466 beschriebene hochempfindliche Manometer zur Messung des Gasdrucks benutzt und das Gas aus dem Vorratskessel entnommen. Um aber auch der Abnahme des Gasdrucks in diesem Kessel Rechnung zu tragen, wurden die Messungen so durchgeführt, daß zu jeder Elektrometerablesung auch eine Druckablesung gemacht wurde, so daß man die Elektrometerangaben als Funktion des Druckes aufzeichnen und daraus graphisch den Wert des Elektrometersausschlags für einen bestimmten Druck entnehmen konnte. In der gleichen Weise wurden auch die Stromwerte für einen und denselben Druck ausgewertet.

Tabelle 3 gibt eine so gewonnene Reihe von Beobachtungen.

Tabelle 3.

<sup>4</sup>/<sub>100</sub>-normal Na-Gehalt.

Elektroden- spannung Volt	Spannungsunter- schied der Sonden in mm (Elektr. Ausschlag)	$\Delta P_F - \Delta P_0$	Galvano- meter- ausschlag Skalenteile	$I_F - I_0$ Skalenteile
0	271, 265, 800	—	10, 20, 24	—
2	800	30	32	12
10	809	45	50	40
100	379, 340, 857	64	150	130
200	875	72	190	166
300	883	79	214	190

1) Über Anordnung und elektrostatischen Schutz der Elektrometerleitungen vgl. Diss. S. 11.

Man kann nun entsprechend der oben angeführten ersten Annahme (Fall 1a) den Spannungsunterschied der Sonden als Spannungsunterschied der Sondenorte auffassen, also ganz der Wirkung des Feldes zuschreiben und als Maß für das Feld ansehen (entsprechend auch den Galvanometerausschlag als den durch dieses Feld verursachten Strom). Zeichnet man die Werte in Kurvenform auf, so erhält man Fig. 5, wobei der Nullpunkt der Abszissenachse um 250 Einheiten entfernt links außerhalb der Zeichnung zu denken ist. Es ergibt sich eine Kurve, die sich vom Nullpunkt aus sehr weit nach rechts ganz flach hinzieht, um bei einem verhältnismäßig hohen Abszissenwert plötzlich stark anzusteigen. Ein solcher Verlauf der Feld-Stromkurve ist aber bei den hier auftretenden

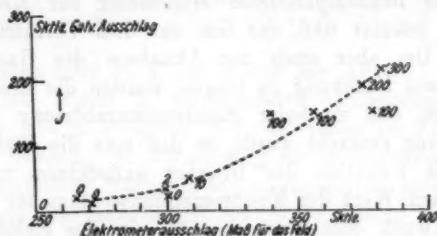


Fig. 5.

1/100-norm. Na-Flamme.

schwachen Feldern sehr unwahrscheinlich; es ist bei sehr kleinen Feldstärken linearer Zusammenhang zwischen Feld und Strom zu erwarten und bei steigendem Feld wohl Abweichung nach unten, aber nicht nach oben. Es ist also anzunehmen, daß in den gemessenen Sondenspannungsunterschieden und Galvanometerausschlägen außer den Wirkungen der tatsächlich vorhandenen Felder auch noch „Eigenspannungen“ der Sonden (bzw. „Eigenströme“) darin stecken, die von Beobachtungsreihe zu Beobachtungsreihe sich ändern. Auffallend ist ganz besonders die Verschiedenheit der bei einer und derselben Elektrodenspannung gemessenen Sondenspannungsdifferenzen bei guter Gleichmäßigkeit der gleichzeitig gemessenen Stromwerte, wodurch das sehr starke Herausfallen einzelner Punkte der Kurve bedingt ist. Außerdem zeigen die Auswertungskurven, daß die Sondenspannungsunterschiede bedeutend stärker

durch Temperaturänderungen der Flamme beeinflusst werden als die Ströme, und daß auch die Stärke dieses Temperaturgangs sehr stark schwankt bei zeitlich getrennten Messungen. Es ist z. B. die einer bestimmten Druckänderung entsprechende Änderung des Elektrometersausschlags 15—40 v. H., die entsprechende Stromänderung nur 5—9 v. H.

Zur Prüfung der Annahme, daß die Sonden einen vom Feld unabhängigen „Eigenspannungsunterschied“ besitzen, der sich dem durch das Feld hervorgerufenen Spannungsunterschied der Sondenorte überlagert, wurden die in Tabelle 3 verzeichneten Messungen so ausgewertet, daß von den bei angelegtem Feld erhaltenen Elektrometersausschlägen die bei Null Volt Elektroden spannung gemessenen Ausschläge subtrahiert wurden, in der Voraussetzung, daß bei Null Volt Elektroden spannung tatsächlich auch das Feld Null in der Flamme herrsche, also der zugehörige Elektrometersauschlag die „Eigenspannungsdifferenz“ der beiden Sonden darstelle. Aus der gleichen Erwägung heraus wurde bei den Strommessungen ebenso verfahren.

Die erhaltenen Werte ergaben die in Fig. 6 mit *a* bezeichnete Kurve. Diese, sowie eine bei vierfachem Metallgehalt der Flamme aufgenommene Kurve *b* zeigen aber immer noch nicht das zu erwartende Aussehen, sondern scheinen nach oben konkav zu sein, statt geradlinig oder nach unten konkav.

Diese Abweichung der Kurven vom erwarteten Verlauf ist jedoch nicht, wie es auf den ersten Blick vielleicht scheint, dadurch zu erklären, daß die Annahme der einfachen Spannungsüberlagerung an der Sonde nicht zutrifft, sondern dadurch, daß bei der Elektroden spannung Null die Flamme nicht feldfrei ist, so daß die bei dieser Spannung gemessenen Ausschläge Ergebnisse einer Übereinanderlagerung der Eigenwirkung der Sonden (bzw. Elektroden) mit einer tatsächlich vorhandenen Feldwirkung sind.

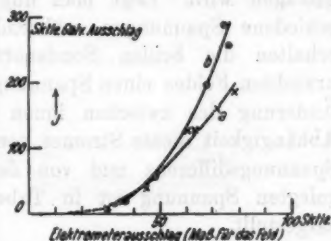


Fig. 6.

*a* = 1/100-norm.-Flamme.*b* = 4/100-norm.-Flamme.

Die Überlagerung der Spannungen an den glühenden Sondendrähten, also die Unabhängigkeit des Faktors  $c$  vom Flammenfeld, insbesondere von der Leitfähigkeit der Flammengase, ließ sich auf zwei Wegen aufzeigen:

1. Die beiden Sonden wurden außerhalb der Flamme über ein Galvanometer und eine Spannungsquelle verbunden. Infolge des zwischen den beiden Sondenorten herrschenden Spannungsunterschieds, der sich aus dem von der Spannungsquelle gelieferten Spannungsunterschied und dem „Eigen-spannungsunterschied“ der Sonden zusammensetzt, fließt ein Strom zwischen den Sonden, der im Galvanometer gemessen und als Funktion des angelegten Spannungsunterschieds aufgetragen wird. Legt man nun an die obere Elektrode verschiedene Spannungen, während der Brenner geerdet ist, so erhalten die beiden Sondenorte infolge des dadurch verursachten Feldes einen Spannungsunterschied und es tritt eine Änderung des zwischen ihnen fließenden Stromes ein. Die Abhängigkeit dieses Stromes von der an die Sonden angelegten Spannungsdifferenz und von der an die obere Elektrode angelegten Spannung ist in Tabelle 4 gegeben und in Fig. 7 dargestellt.

Tabelle 4.

Spannung an der oberen Elektrode	Galvanometerausschlag bei einem Spannungs- unterschied der Sonden von					
	+ 0,1	- 0,1	+ 0,5	- 0,5	+ 2,0	- 2,0
	Volt					
	Skalenteile					
0 Volt	+ 86,5	+ 34,5	+ 109,0	+ 33,0	+ 131,0	- 97,5
- 10 "	+ 96,7	—	+ 110,2	- 28,0	—	- 98,5
- 100 "	+ 97,5	+ 52,8	+ 111,5	- 17,5	—	- 95,8
- 200 "	+ 99,5	+ 58,2	+ 112,0	- 20,0	+ 134,0	- 95,8
Elektrode und Brenner isoliert }	+ 93,2	+ 41,7	+ 110,0	- 28,5	+ 132,0	- 98,8

Aus dem Verlauf der Kurven läßt sich über die Wirkung des Feldes auf den Sondenstrom schließen: Die durch das Feld hervorgerufene Spannungsdifferenz überlagert sich der Sonden-spannungsdifferenz direkt, unabhängig von deren Größe. Das ergibt sich daraus, daß die Kurven für verschiedene

Spannungen der oberen Elektrode durch eine Parallelverschiebung genau ineinander überführbar sind. Greift man einen Stromwert auf einer der Kurven heraus, so findet sich der gleiche Wert auf den anderen Kurven bei Sondenspannungs-

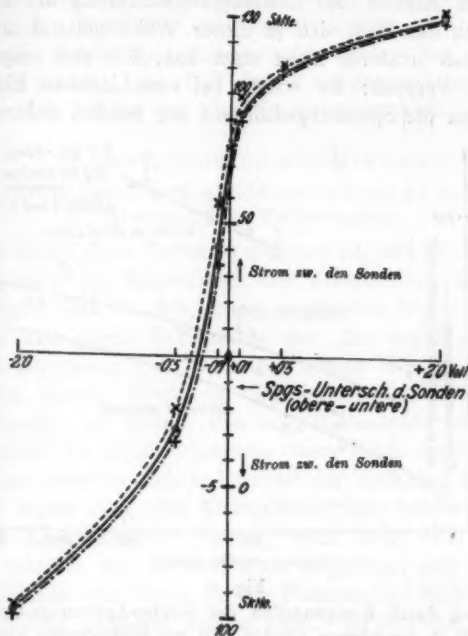


Fig. 7.

- Brenner und obere Elektrode isoliert.
- + Brenner und Elektrode verbunden und geerdet.
- × Brenner geerdet, obere Elektrode - 200 Volt.

unterschieden, die um bestimmte, für je zwei der Kurven feste Spannungsunterschiede<sup>1)</sup> größer bzw. kleiner sind. Ebenso ergibt sich aus der Parallelverschiebung, daß ein Einfluß des Feldes auf den Faktor  $c$  nicht (oder jedenfalls nicht in merklichen Maße) besteht. Ein solcher Einfluß müßte nämlich von der Richtung des Flammenfeldes relativ zu der des Sonden-

1) Die somit als Maß der Feldunterschiede angesehen werden können.

feldes unabhängig sein, also immer Verstärkung oder Schwächung des Sondenstromes ergeben, so daß die Kurven durch Drehungen um einen allen gemeinsamen Punkt, der dem Feld Null entspräche, aus einander hervorgehen würden. Insbesondere müßte ein Einfluß der Leitfähigkeitsänderung der Flammengase durch das Feld sich in dieser Weise geltend machen.

2. Daß letzteres nicht statt hat, läßt sich zeigen durch folgenden Versuch: Es wurde bei verschiedenen Elektroden- spannungen die Spannungsdifferenz der Sonden elektrometrisch

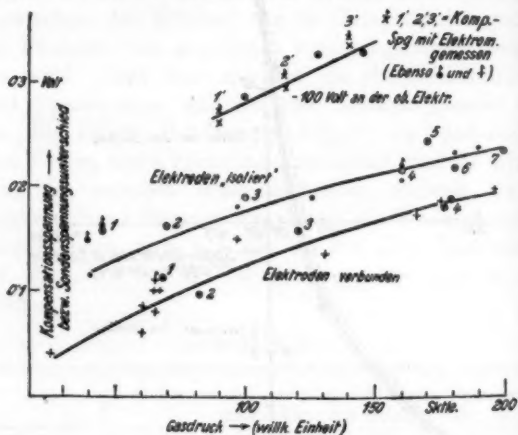


Fig. 8.

Feldmessung durch Kompensation des Sonden-Spannungs-Unterschiedes.  
Die mit  $\circ$  umgebenen Punkte sind mit Elektrometer gemessen.

gemessen und die erhaltenen Werte verglichen mit den von einer äußeren Spannungsquelle gelieferten Spannungsunterschieden, die man an die beiden Sonden anlegen mußte, um ihren Spannungsunterschied zu kompensieren, so daß im Sondenstromkreis kein Strom fließt. Eine geeignete Schaltung erlaubte, die elektrometrischen und die Kompensationsmessungen in raschem Wechsel auszuführen. Die Kompensationsspannungen wurden teils mit dem Elektrometer, teils mit einem Siemens Halske-Voltmeter gemessen. Fig. 8 gibt die Kompensationsmessungen, wozu noch einige Punkte der elektrometrischen Meßreihe zum Vergleich eingetragen sind. Ein Vergleich der

beiden Druck-Spannungsunterschied-Kurvensysteme zeigt über einen größeren Druck- (also Temperatur-) Bereich vollkommene Übereinstimmung, womit unzweifelhaft erwiesen ist, daß die elektrometrische Messung der Sondenspannungen diese richtig wiedergibt, daß also die Leitfähigkeit der Flamme keine Rolle dabei spielt. Außerdem geht daraus hervor, daß auch keine Fälschung durch Spannungsverluste infolge von Isolationsmängeln vorliegt, da bei der Kompensationsmessung die Isolation der Sonden gar nicht beansprucht wird.

## II. Ausarbeitung der Meßweise.

### 1. Bemerkungen über den feldfreien Zustand der Flamme. Einwandfreie Feldmessung.

Da durch diese Versuche erwiesen ist, daß an den Sonden-  
drähten sich die Spannungen der Flammenorte den „Eigen-  
spannungen“ der Sonden immer in gleicher Weise überlagern,  
daß sie also durch Subtraktion der „Eigenspannungen“ von  
den Sondenspannungen gefunden werden können, handelt es  
sich nun darum, Wege zur Herstellung des Feldes Null in  
der Flamme zu finden, das zur Bestimmung der „Eigen-  
spannungen“ (= Sondenspannung beim Felde Null) notwendig  
ist. Diese ergeben sich auf Grund der einfachen Überlegung,  
daß in einem Gas, das Elektrizitätsträger beider Zeichen in  
gleicher Konzentration<sup>1)</sup> enthält, beim Feld Null auch kein  
Strom möglich ist, so daß auch umgekehrt aus dem Nicht-  
vorhandensein von Strom in der Flamme das Nichtvorhanden-  
sein von Feld gefolgert werden kann. Es gibt nun zwei Wege,  
die es ermöglichen, den strom-, also feldfreien Zustand in der  
Flamme herzustellen:

1. Die Elektroden werden getrennt und isoliert. In  
diesem Falle ist kein Feld vorhanden, so lange die Isolation  
der Elektroden wesentlich größeren Widerstand hat als die  
Flamme. Das zeigt ein Vergleich der Flamme mitsamt der  
Elektrodenanordnung mit einem galvanischen Element. Bei  
diesem ist in offenem Zustand der Widerstand des Elektrolyten

1) So daß auch bei Bewegung der gesamten Gasmasse kein Strom  
auftritt. In Teil I ist bereits gezeigt worden, daß für Leitfähigkeits-  
bestimmungen die Bedingung elektrisch neutraler Flamme erfüllt sein  
muß an der Stelle, wo die Feldmessung erfordert wird.



verschwindend klein gegenüber den übrigen Widerständen, bzw. seine Leitfähigkeit sehr groß. Der Elektrolyt wird also alle in ihm etwa auftretenden Spannungsunterschiede ausgleichen. Da nun an den Elektroden Potentialsprünge gegenüber dem Elektrolyten vorhanden sind, dieser aber überall die gleiche Spannung hat, treten diese Potentialsprünge in Erscheinung als Spannungsunterschied der Elektroden gegeneinander, als Klemmenspannung des offenen Elements. Werden die beiden Elektroden aber auf gleiche Spannung gebracht, d. h. durch einen Leiter kurzgeschlossen, dessen Leitvermögen gegenüber dem des Elektrolyten groß ist, so müssen infolge der Potentialsprünge nun Spannungsunterschiede im Elektrolyten, also ein Feld und infolge davon Strömung eintreten. In der Flamme liegen die Verhältnisse genau so. Bei isolierten Elektroden weisen diese einen Spannungsunterschied gegeneinander auf. Ist die Isolation der Elektroden gegenüber diesem Spannungsunterschied gut genug, so herrscht im Innern der Flamme tatsächlich das Feld Null, und man kann an den Sonden unmittelbar deren Eigenspannungsunterschied messen. Die Prüfung der Isolation geschieht in der Weise, daß an die eine Elektrode über das Galvanometer eine hohe Spannung gelegt wird, während die andere isoliert ist (d. h. nicht mit Erde oder sonst einer Spannungsquelle verbunden). Bei genügender Isolation der Elektroden darf durch das Galvanometer kein Strom fließen.

2. Die Isolationsschwierigkeiten werden vermieden bei Herstellung des Feldes Null durch Kompensation des durch die Flamme fließenden Stroms mit Hilfe einer entsprechend gerichteten elektromotorischen Kraft (analog dem Fall eines kompensierten galvanischen Elements). Es war nun zu prüfen, ob diese beiden Wege das gleiche Ergebnis liefern. Zu diesem Zwecke wurde mit dem Elektrometer der Spannungsunterschied der Sonden gemessen abwechselnd bei isolierten Elektroden und bei kompensiertem Strom. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle 5 zusammengefaßt. Trägt man die Werte in Abhängigkeit vom Gasdruck als Ordinaten auf, so ergibt sich, daß sie alle recht gut durch eine Gerade dargestellt werden, mithin Übereinstimmung der beiden Wege zur Herstellung des Feldes Null (vgl. Fig. 9).



Tabelle 5.

Druck des Leuchtgases	Elektrometerausschlag	
	bei komp. Strom Skalenteile	bei isoliert. Elektroden Skalenteile
100	23	—
115	—	20
125	1	—
136	—	— 16
198	—	— 44
208	— 43	—
208	—	— 46
220	— 60	—

Hiernach haben wir zwei gute Wege für einwandfreie Flammenfeldmessung durch Sonden. In bezug auf bisher durchgeführte Feldmessungen ergibt sich, daß die meist an-

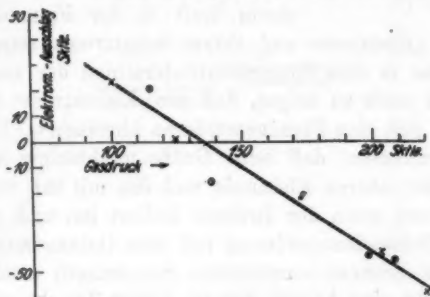


Fig. 9.

- × Bei Kompensation.  
○ Bei Isolieren der Elektroden.

gewandte Methode der Ermittlung des „Eigenspannungsunterschieds“ der Sonden durch Verbinden oder gleichzeitiges Erden der Elektroden falsche Werte für diesen liefern mußte, da in diesem Fall immer noch Feld in der Flamme herrscht.

## 2. Ausarbeitung der Strommeßweise.

Bei bisher angeführten Messungen von Flammenströmen wurde der bei Null Volt Elektroden spannung (also vermeintlich feldfreiem Zustand der Flamme) auftretende Strom als der von Thermokräften oder anderen Störungen stammende „Eigen-

strom“ der Elektrode angesehen, den man von den bei Anlegen von Spannung gemessenen Strömen zu subtrahieren habe, um die der Spannung entsprechenden Ströme zu erhalten. Wie wir oben gesehen haben, muß dies aber zu falschen Ergebnissen führen, da die Flamme nicht bei Null Volt Elektroden-

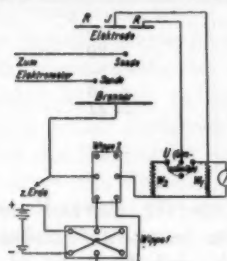


Fig. 10.

spannung feldfrei ist, sondern nur bei von einander isolierten Elektroden. Zur Ermittlung des Eigenstromes wurde daher, wie stets, eine Klemme des Galvanometers mit der Elektrode, die andere mit dem Schutzring verbunden, die letztere Klemme jedoch nicht mit der Spannungsquelle (bzw. der Erde) verbunden, sondern isoliert (Schaltung siehe Fig. 10). Der so beobachtete Eigenstrom läuft in der Flamme zwischen

der oberen Elektrode und ihrem Schutzring; seine Ursache liegt offenbar in dem Temperaturunterschied der beiden Teile.

Es war noch zu zeigen, daß der „Eigenstrom“ unter allen Umständen sich den Flammenströmen überlagert. Dies wurde daraus geschlossen, daß seine Größe unabhängig ist von der Spannung der oberen Elektrode und des mit ihr verbundenen Galvanometers, wenn der Brenner isoliert ist, und umgekehrt, wenn die Elektrodenanordnung mit dem Galvanometer isoliert ist und dem Brenner verschiedene Spannungen erteilt werden. Tabelle 6 gibt eine Anzahl der zu diesem Zwecke angestellten Versuche wieder.

Tabelle 6.

Spannung der		Schutzring und Innenelektrode verbunden	Strom Skalenteil
oberen Elektr.	unteren Elektr.		
isoliert	isoliert	vor dem Galvanometer	9,5
isoliert	isoliert	über Galvanometer	244,0
geerdet	isoliert	" "	238,5
isoliert	geerdet	" "	248,5
isoliert	- 10 Volt	" "	280,0
- 10 Volt	isoliert	" "	247,5
- 100 Volt	isoliert	" "	237,5
isoliert	- 100 Volt	" "	236,5

## 3. Praktische Durchführung der Leitfähigkeitsmessungen.

Für die praktische Durchführung der Leitfähigkeitsmessungen wurde die oben beschriebene Ermittlungsweise der „Eigenspannung“ etwas abgeändert, um möglichst schnell messen zu können, was wegen der raschen Gasdruckabnahme erforderlich war zur Erzielung zusammenhängender Meßreihen.

Es wurde folgende Methode der indirekten Kompensation an Stelle der direkten angewandt:

Durch Anlegen verschiedener Elektroden Spannungen beider Vorzeichen werden verschieden starke Ströme in beiden

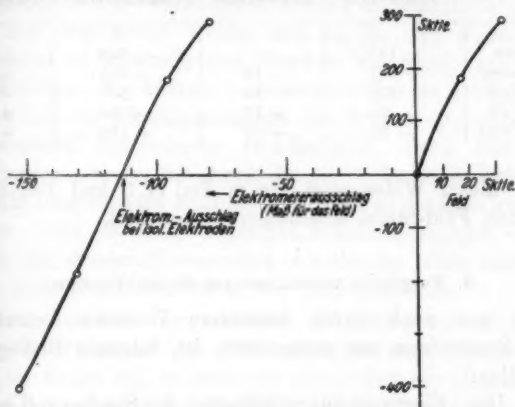


Fig. 11.

Richtungen erzielt, die nach Subtraktion des „Eigenstroms“ als Ordinaten einer Kurve aufgetragen werden, deren Abszissen die zugehörigen Elektrometerrauschläge sind. (Elektrometer- und Galvanometerablesungen sind in der früher schon erwähnten Weise auf gleichen Gasdruck bezogen.) Die durch die so erhaltenen Punkte gelegte Kurve schneidet dann die Abszissenachse in einem Punkt, der dem Feld Null entspricht (da der Strom gleich Null), mithin den „Eigenspannungsunterschied“ der Sonden, d. h. den wahren Nullpunkt der Feld-Stromkurve angibt. Man verschiebt daher alle in dieser Weise aufgetragenen Elektrometerrauschlag-Strom-Kurven so, daß dieser Punkt in den Anfangspunkt des Koordinatensystems

fällt. Daß dieser Weg die richtigen Ergebnisse liefert, zeigt die Übereinstimmung der durch diese graphische Kompensation gefundenen „Eigenspannungsdifferenz“ der Sonden mit dem bei isolierten Elektroden gemessenen Elektrometerrausschlag in folgendem Beispiel (vgl. Tabelle 7 und Fig. 11).

Tabelle 7.

Elektroden	Elektrometer- ausschlag Skalenteile	Feld (willk. Einh.) Skalenteile	Galvanometer- ausschlag Skalenteile	Strom Skalenteile
isoliert	- 113	—	- 128	—
verbunden	- 131	- 18	- 315	- 187
+ 2 Volt	- 153	- 40	- 535	- 407
- 2 Volt	- 96	+ 17	+ 50	+ 178
- 100 Volt	- 80	+ 33	+ 162	+ 290

In dieser Weise sind die in Teil II, 3 und Teil III angegebenen Feld-Strom-Messungen ausgewertet.

### 3. Vergleich verschiedener Sondenformen.

Es war noch durch besondere Versuche festzustellen, welche Sondenform am geeignetsten ist, folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Die „Eigenspannungs“-differenz der Sonden soll so klein als möglich sein, da sie sich zu der vom Feld hervorgerufenen addiert, also bei ihrer starken Temperaturabhängigkeit erhebliche Korrekturen der Feldmessung erforderlich macht.

2. Die Änderung des Stromes durch die Anwesenheit der Sonden soll möglichst klein sein, weil dadurch die Sicherheit gegeben ist, daß das bei Abwesenheit der Sonden herrschende Feld mit dem durch die Sonden angegebenen gut übereinstimmt.

3. Die Feldmessung soll möglichst schnell und sicher vor sich gehen.

Eingehende Variation der Sondenformen (vgl. Diss.) zeigte als am besten geeignet Sonden aus 0,5 mm dickem Platindrath, an deren Enden 0,1 mm dicke, etwa 5 mm lange Platindrathstückchen befestigt sind. Während die dicken Drähte nur

schwache Rotglut zeigen, kommen die dünnen Drähtchen in helles Glühen. Es ist also die Kühlung der Flamme am empfindlichen Teil der Sonden (den dünnen Drähtchen) auf ein Mindestmaß herabgesetzt, die als Hauptursache der Störungen anzusehen ist, da sie die Ströme verringert und die Feldstärken vergrößert. Die Sonden messen dann die am Ort der dünnen Drähtchen herrschende Spannung.

#### 4. Besprechung bisheriger Sondenmessungen.

Bei der Beurteilung von Sondenmessungen in bezug auf Zuverlässigkeit und Genauigkeit kommt es wesentlich auf die Größe des gemessenen Feldes und die Art der Messung an. Es ist dabei zu unterscheiden zwischen Messungen bei großen und bei kleinen Feldstärken. Messungen bei so großen Feldstärken, daß die Eigenspannungen der Sonden gegenüber den zu messenden Spannungen verschwinden, seien hier nicht weiter betrachtet, da bei ihnen die in vorliegender Arbeit als notwendig festgestellten Korrekturen nicht in Betracht kommen. Dagegen lohnt es sich, diejenigen Sondenmessungen zu betrachten, bei denen die Spannung der Sonden nicht sehr hoch war, so daß es auf Bruchteile von Volt ankommt.

Es ist nun sehr verwunderlich, einerseits, wie wenig Einheitlichkeit in der Art der Messungen bei verschiedenen Verfassern zu finden ist, andererseits auch, daß die Unterschiede der Meßweisen in ihrer Wirkung auf die Ergebnisse nie besprochen worden sind. Die Berücksichtigung des bei der Elektrodenspannung Null noch in der Flamme vorhandenen Feldes ist überhaupt nie geschehen, vielleicht deshalb, weil bei Verwendung glühender Elektroden die Stärke dieses Feldes ziemlich klein ist, so daß man, fürs erste wenigstens, annehmen konnte, daß es tatsächlich gleich Null sei.

Die „Eigenspannungen“ der Sonden haben einige Verfasser in der allerdings noch nicht ganz einwandfrei richtigen Weise zu berücksichtigen gesucht, daß sie sie gleichsetzten den von den Sonden bei der Elektrodenspannung Null angenommenen Spannungen und von den bei angelegter Elektrodenspannung sich ergebenden Sondenspannungen (bzw. deren Differenzen) subtrahierten. So z. B. ist in der ersten derartigen Unter-

suchung Hrn. Warburgs<sup>1)</sup> verfahren worden. In einer fast gleichzeitigen Untersuchung von Hrn. Marx<sup>2)</sup> findet die Eigenspannung dagegen keine Berücksichtigung. In einer Arbeit Hrn. Golds<sup>3)</sup> ist sie bei Messungen mit einer Sonde berücksichtigt, merkwürdigerweise aber (ohne Angabe eines stichhaltigen Grundes) nicht bei Messungen mit Doppelsonde. Vielleicht war für Hrn. Gold die — allerdings irrige — Annahme bestimmend, daß bei Verwendung zweier Sonden und Messung ihres Spannungsunterschieds die „Eigenspannungen“ der Sonden herausfallen. Die Messungen Hrn. Golds dürften infolgedessen gerade bei den kleinsten Feldstärken anzuzweifeln sein. Während bei Hrn. Wilckens<sup>4)</sup> die „Eigenspannung“ in der erläuterten Weise in Betracht gezogen ist, zeigen wieder die neueren Arbeiten über Flammen keinerlei Erwähnung oder Berücksichtigung. So wurde z. B. bei Hrn. Schönborn<sup>5)</sup> als Sonde eine an einem Kupferdraht befestigte Platindrahtspirale verwendet, wobei die Berührungsstelle von Platin und Kupfer sich in der Flamme befand, was große „Eigenspannung“ der Sonde zur Folge haben muß. Außerdem wurden kalte Elektroden verwendet, bei denen nach meinen Erfahrungen bei Null Volt Elektrodenspannung schon ein ziemlich großes Feld auftritt. Durch diese beiden Fehlerquellen ist die Feldmessung sehr stark in ihrem Wert beeinträchtigt. — In der gleichen Weise ist Hr. Kurze<sup>6)</sup> vorgegangen. Die Potentialverteilung in der Flamme und die durch die Elektroden verursachten Störungen suchte Verfasser dadurch zu ermitteln, daß die eine Elektrode aus der Flamme entfernt wurde. Über die Spannung des Brenners ist keine Angabe gemacht. Die von der Sonde angezeigte Spannung wird dem betreffenden Flammenort zugeschrieben, was infolge der Nichtberücksichtigung der „Eigenspannung“ zu dem Ergebnis führt, daß an den heißeren Teilen der Flamme freie positive, an den kälteren Teilen freie negative

1) Ann. d. Phys. 2. S. 301. 1900. Die Ergebnisse Hrn. Warburgs sind von Hrn. A. Becker in Volt/cm umgerechnet im Artikel „Flammenleitung“ in Grätz' Handbuch III, S. 452 gegeben.

2) Ann. d. Phys. 2. S. 768. 1900.

3) Proc. Roy. Soc. A. 79. S. 43. 1907.

4) Diss. Heidelbg. S. 8. 1914.

5) Ztschr. f. Phys. 4. S. 118. 1921.

6) Ann. d. Phys. 66. S. 133. 1921.

Ladung vorhanden sei. Ferner stellt Verf. bei Vorhandensein zweier Elektroden in der Flamme eine Aufladung der nicht geerdeten Elektrode fest, die er zwar bei der Aufstellung von Strom-Spannungs-Kurven berücksichtigt, bei der Feldmessung jedoch gänzlich außer acht läßt. Bei einer Wiederholung der Wilckensschen Feldmessungen findet Hr. Kurze den gleichen Spannungsverlauf wie Hr. Wilckens, es ist jedoch nicht angegeben, ob die Messungen wie vorher oder in gleicher Weise wie bei Hrn. Wilckens vorgenommen wurden. — Ebenso wenig ist die „Eigenspannungsdifferenz“ berücksichtigt bei den mit Doppelsonde ausgeführten Messungen Hrn. Bryan's<sup>1)</sup>, der nach einer von Hrn. H. A. Wilson<sup>2)</sup> angegebenen Weise Relativleitfähigkeiten metaldampfhaltiger Flammen untersuchte.<sup>3)</sup>

Man kann also zusammenfassend sagen, daß ganz einwandfreie Feldmessungen bei keiner der bisherigen Flammenuntersuchungen vorliegen, wenn auch allerdings bei großen Feldern alle Fehlerquellen weniger mitwirken. Mangels geeigneter Angaben läßt sich die Größe des Fehlers bei den einzelnen Messungen kaum abschätzen. Sie kann jedenfalls nach den vorliegenden Erfahrungen leicht Werte annehmen, die die Brauchbarkeit der Messungen überhaupt vielfach ganz in Frage stellen kann.

### III. Teil.

#### Ergebnisse der Leitfähigkeitsbestimmungen und der Messungen der Flammenkonstanten.

##### 1. Bestimmung der Flammenkonstanten.<sup>4)</sup>

Der Metallgehalt der Flamme läßt sich in einfacher und genügend genauer Weise aus der vom Zerstäuber gelieferten

1) Phys. Rev. 18. (2. Ser.) S. 275. 1921.

2) H. A. Wilson, Phil. Trans. A. 216. S. 63. 1915.

3) Da sowohl bei Hrn. Wilson als auch bei Hrn. Bryan keinerlei Angaben gemacht sind über die absol. Größen der von ihnen verwendeten Felder, läßt sich über den Grad der Zuverlässigkeit ihrer Feldmessungen nichts aussagen. Außerdem ist gegen ihre Untersuchungen einzuwenden, daß keine einwurfsfreien Stromverhältnisse vorliegen.

Anm. b. d. Korr.: Die gleichen Mängel wie die Untersuchungen der Herren Wilson und Bryan weist auch eine soeben erschienene Arbeit Hrn. B. T. Barnes' auf. Phys. Rev. 23. S. 178. 1924.

4) Näheres über die in den bisher durchgeführten Untersuchungen angewandten Methoden zur Bestimmung der Flammenkonstanten ist zu sehen in Hrn. Beckers Bericht „Flammenleitung“, Graetz, Handbuch, III. Bd. Teil D. 12.



Salzmenge und dem von ihr erfüllten Volumen berechnen. Die zerstäubte Lösungsmenge beträgt bei dem verwendeten Sprüher und einem Luftdruck von 102,5 cm Wassernähe 2,0 mm<sup>3</sup> in der Sekunde, was bei einer Normal-Natriumalösung einer Natriummenge von  $\frac{23 \cdot 2,0}{1000}$  g/sec entspricht. Das von dieser eingenommene Flammenvolumen berechnet sich aus dem Flammenquerschnitt — 1,5 · 4,5 cm<sup>2</sup> — und der Flammengeschwindigkeit, die für die Leuchtgasflamme im Mittel 295 cm/sec, für die Alkoholflamme 245 cm/sec betrug, zu 1991 cm<sup>3</sup> bzw. 1654 cm<sup>3</sup>. Die Metallkonzentration ist also für die Leuchtgasflamme  $2,31 \cdot 10^{-8}$  g Na/cm<sup>3</sup> oder  $6,28 \cdot 10^{14}$  Atome/cm<sup>3</sup>, für die Alkoholflamme  $2,78 \cdot 10^{-8}$  g Na/cm<sup>3</sup> oder  $7,56 \cdot 10^{14}$  Atome/cm<sup>3</sup>.

Die *Flammengeschwindigkeit* wurde nach dem von Hrn. Andrade angegebenen Verfahren durch Beobachtung der Bahnen von glühenden, mit den Flammengasen aufsteigenden Kohlepulverteilchen mittels Drehspiegels gemessen.

Der *Flammenquerschnitt* wurde aus den Breitenabmessungen der Flamme an der Stelle berechnet, wo die Flammengeschwindigkeit gemessen war. Nun ist hierbei zu beachten, daß aus der Flamme Metall in die Luft diffundiert, was sich leicht durch ein der Metallflamme genähertes kleines Flämmchen nachweisen läßt.<sup>1)</sup> Ich erhielt bei stark gefärbter Natriumflamme Gelbfärbung dieses Flämmchens noch in einem Abstand von etwa 2,5 mm von der sichtbaren Grenze der langen Flammenseite und etwa 1,5 mm von der der kurzen Seite. Es ist jedoch die Färbung dieses Flämmchens viel weniger stark als die der großen Flamme, was auf genügend scharfe Begrenzung des metallhaltigen Querschnittes schließen läßt. Bei der großen Empfindlichkeit der Na-Flammenreaktion darf angenommen werden, daß der Fehler bei der Berechnung des Flammenquerschnittes aus den sichtbaren Grenzen unerheblich ist.

Die *Flammentemperatur* wurde durch Beobachtung des „Linienumkehr“ gemessen.<sup>2)</sup> Das Bild des für das kontinuierliche Spektrum als Lichtquelle verwendeten aufrechtstehenden

1) Vgl. H. Zahn, Schriften des naturw. Vereins für Schleswig-Holstein. Bd. XV. S. 344. 1913.

2) Apparatordnung bei H. Kohn, Diss. Breslau 1911.



Nernstfadens wurde an den zwischen den Sonden liegenden Flammenort entworfen, so daß Temperatur und Feld an der gleichen Stelle gemessen wurden. Die Temperaturmessungen konnten nur bei den höchsten Metallkonzentrationen gut und vor allem in kurzer Zeit ausgeführt werden, da bei niederen Metallgehalten die Linienumkehr zu schwer zu beobachten war. Es wurde die bei großen Metallgehalten gemessene Temperatur auch der Flamme mit kleinerem Metallgehalt bei gleichem Gasdruck zugeschrieben, da nach Frl. H. Kohns Beobachtungen die Umkehrtemperatur von der Metallkonzentration praktisch unabhängig ist. Es ergaben sich für die Leuchtgasflamme Temperaturen von  $1940^{\circ}$  abs. bis  $2030^{\circ}$  abs., für die Alkoholflamme im Mittel  $2050^{\circ}$  abs.

## 2. Die Feldverteilung in der Flamme bei kleinen Elektrodenspannungen.

Es ist schon im I. Teil erwähnt worden, daß für kleine Elektrodenspannungen (unter 300 Volt) das Feld in der Flamme als praktisch konstant innerhalb eines größeren Gebiets anzunehmen ist. Dies wurde durch Feldmessungen nach dem in Teil II erläuterten Verfahren nachgeprüft. Eine bei Elektroden-  
spannungen von  $-2$  und  $-100$  Volt durchgeführte Versuchsröhre zeigte, daß die örtlichen Änderungen des Feldes höchstens von der Größenordnung der Versuchsfehler der Sondenmessung sind, die allerdings bis zu 15 Proz. betragen.

Das Feld im Innern der Flamme ist bis zu einer Entfernung vom Flammenrand, die höchstens  $\frac{1}{6}$  der Flammenbreite, also höchstens 2,5 mm beträgt, überall von gleicher Größe. Weiter nach außen zu (immer in Richtung der kurzen Seite des Flammenquerschnitts) scheint es etwas abzunehmen. Die örtlichen Verschiedenheiten des Feldes in senkrechter Richtung betragen bei einer Verschiebung der Sonden um ihren eigenen Abstand (etwa 6 mm) auch nur etwa 15–20 Proz., selbst noch in 10 mm Entfernung von der Kathode und bei  $-100$  Volt Elektrodenspannung. Es wurde daher bei den folgenden Messungen das Feld immer an der gleichen Stelle gemessen (bei 5 mm Entfernung der unteren Sonde von der Anode).

Über den Zusammenhang des Feldverlaufs mit der Elektrodenkonzentration in der Flamme läßt sich auf Grund der vorliegenden, im folgenden noch näher zu besprechenden Er-

gebnisse aussagen, daß bei einer Änderung der Elektronenkonzentration im Verhältnis 1:100 eine wesentliche Änderung des bei festgehaltener Elektrodenspannung gemessenen Feldes nicht festzustellen ist. Übrigens hat Hr. Wilkens den gleichen Schluß, zwar nur in kleinerem Konzentrationsintervall, aus seinen, nach jetziger Kenntnis allerdings nicht ganz fehlerfreien Feldmessungen gezogen.

Einen sehr deutlichen Einfluß auf die Feldverteilung und auf die Größe des Feldes hat dagegen die Art des in die Flamme gebrachten Metalls. Es wird z. B. in einer Kaliumflamme die gleiche Feldstärke im Flammeninnern bei - 10 Volt Elektrodenspannung erreicht wie in Natrium- und Lithiumflammen bei - 100 Volt Elektrodenspannung.

### 3. Die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Metallkonzentration.

Aus den in Fig. 12 für die Leuchtgasflamme, in Fig. 13 für die Alkoholf Flamme aufgezeichneten Feld-Strom-Kurven, die ein

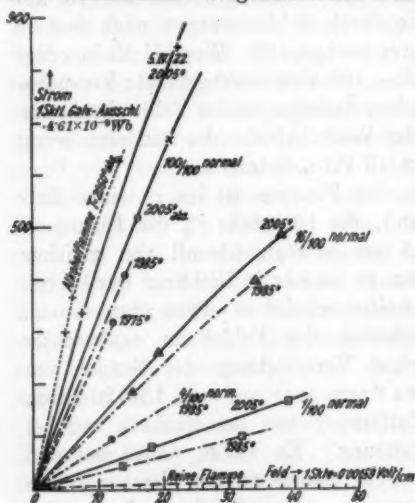


Fig. 12.

Konzentrations- und Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit in der Leuchtgasflamme (Na)  
25. III. 22 und 5. IV. 22.

Na-Konzentrationsbereich von  $\frac{1}{100}$ -normal-Lösungen bis zu  $\frac{1}{1}$ -normal-Lösungen umfassen, lassen sich die Leitfähigkeiten in Verhältniszahlen als Neigung der Kurven ablesen. Die absoluten Leitfähigkeiten werden aus den relativen durch Berücksichtigung des auffangenden Querschnitts der Innenelektrode -  $0,95 \text{ cm}^2$  - und der Empfindlichkeiten von Galvanometer und Elektrometer berechnet als Quotient aus Stromdichte und Feldstärke.

Zur Bestimmung der Kurvenneigung wurden die bei der niedrigsten Elektrodenspannung ( $-2$  Volt) gemessenen Strom- und Feldwerte benutzt, da die Kurven in diesen Punkten noch nicht merklich von der Tangente im Nullpunkt abweichen, die so erhaltenen Werte also die wahre Leitfähigkeit in sehr guter Näherung darstellen. In Tabelle 8 sind die aus den angegebenen Kurven und weiteren, in Fig. 12 und 13 nicht dargestellten Messungen berechneten spezifischen Leitfähigkeiten zusammengestellt. Es ergibt sich daraus die Leitfähigkeit sowohl für die Leuchtgasflamme als auch für die Alkoholflamme proportional der Quadratwurzel aus der Metall-

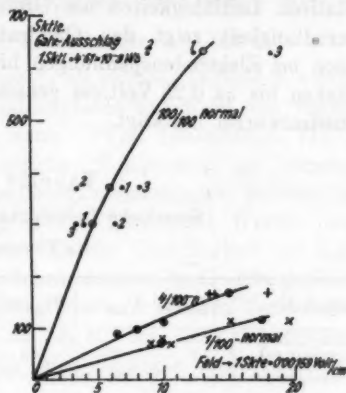


Fig. 13.

Konzentrationsabhängigkeit in der Alkoholflamme (Na) 30. V. 22.

Temp. = 2050° abs.

Quadratwurzel aus der Metallkonzentration. Das zeigt sehr schön die gute Übereinstimmung der beobachteten Werte mit den aus dem jeweils in der  $1/100$ -normal-Flamme gefundenen Wert unter Annahme der Gültigkeit des Quadratwurzelgesetzes berechneten Werten (die unter den gefundenen in den jeweils mit „berechnet“ bezeichneten Zeilen stehen). Zu weiterer Prüfung des Konzentrationszusammenhangs wurden einige Versuchsreihen so umgerechnet, daß die in der konzentriertesten Flamme erhaltene Leitfähigkeit gleich 100 gesetzt wurde und mit den in entsprechendem Verhältnis umgerechneten Leitfähigkeiten der weniger Metall-

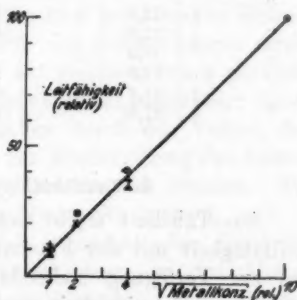


Fig. 14.

○ 25. III. 22. 1985° abs.

+ 25. III. 22. 2005° abs.

× 30. IV. 22. 2050° abs. (Alkoh.)

△ 5. IV. 22. 2005° abs.

gleich 100 gesetzt wurde und mit den in entsprechendem Verhältnis umgerechneten Leitfähigkeiten der weniger Metall-

enthaltenden Flamme in Fig. 14 so eingetragen wurde, daß die Quadratwurzel aus der Konzentration als Abszisse, die relativen Leitfähigkeiten als Ordinaten gewählt wurden. Die Geradlinigkeit zeigt das Quadratwurzelgesetz gut bestätigt. Auch bei Elektrodenspannungen bis zu 1500 Volt, wobei Feldstärken bis zu 0,25 Volt/cm gemessen wurden, zeigte sich die Quadratwurzel bestätigt.

Tabelle 8.

Spezifische Leitfähigkeit in  $10^{-8} \cdot \frac{1}{\Omega}$ .  
Na-Flamme.

Metallgehalt	$\frac{1}{100}$ -n.	$\frac{4}{100}$ -n.	$\frac{16}{100}$ -n.	$\frac{100}{100}$ -n.	Bemerkungen	Gasdruck cm
$\sqrt{\text{Metallgehalt rel.}}$	1	2	4	10		
17. III. 1922	10,0	16,7	—	—	—	119
21. " "	12,5	25,8	—	—	—	125
21. " "	15,0	23,8	—	—	—	120
23. " " vorm.	—	20,0	41,0	—	—	125
23. " " nachm.	—	18,3	48,5	—	—	125
25. " " {	9,24	21,2	37,0	86,4	beob. } berech. }	116
	(9,24)	(18,5)	(36,96)	(92,4)		
25. " " {	—	—	—	80,4	beob. }	120
25. " " {	12,3	—	43,7	102,0	beob. }	110
	(12,3)	—	(48,2)	(123,0)	berech. }	
28. " " {	13,0	—	—	99,0	beob. }	116
5. IV. " {	12,3	—	43,8	137,0	beob. }	110
30. V. " {	21,6	—	40,2	201,0	beob. }	Alkohol-
	(21,6)	—	(43,2)	(216,0)	berech. }	flamme

#### 4. Leitfähigkeit und Temperatur.

Aus Tabelle 8 ergibt sich außerdem ein starker Gang der Leitfähigkeit mit der Flammentemperatur. Leider ist jedoch das zur Verfügung stehende Temperaturbereich wegen der praktischen Schwierigkeit starker Variation zu klein geblieben, um den Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Temperatur zahlenmäßig festzulegen. Es müssen nämlich die beiden Werte bei 1950° und 2050° mit Vorsicht aufgenommen werden. Bei dem ersteren ist wegen der verwendeten geringen Metallkonzentration die Temperaturmessung als zweifelhaft anzusehen. Der zweite Wert bei 2050° muß, um mit den anderen Werten

vergleichbar zu sein, aus den Messungen in der Alkoholflamme auf die Leuchtgasflamme umgerechnet werden nach Maßgabe des Konzentrationsverhältnisses und ergibt sich zu  $181 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{52}$ , wobei aber zu bedenken ist, daß eine solche Umrechnung nicht von vornherein als zulässig angesehen werden kann, da ja auch die Flammengasbeschaffenheit von Einfluß auf die Leitfähigkeit sein kann. (Vgl. Dissertation III. 1.) Ebenso zeigen auch bei gleicher Temperatur an verschiedenen Tagen angestellte Leitfähigkeitsmessungen Schwankungen, die z. B. bei den für  $2005^{\circ}$  erhaltenen Werten etwa 35 Proz. betragen, also mehr als der Unsicherheit der Leitfähigkeitsmessungen zugeschrieben werden darf. Als positives Ergebnis bleibt die Feststellung des sehr starken Temperaturanges der Leitfähigkeit, die z. B. bei einer Temperaturerhöhung von  $1975^{\circ}$  auf  $2005^{\circ}$  eine Zunahme von etwa 30 v. H. erfährt.

### 5. Leitfähigkeit und Atomgewicht.

Zum Vergleich der Leitfähigkeiten verschiedener Metalle wurde, da es nur auf Relativmessungen ankam, die Verwendung des Gasvorratskessels verlassen und das Leuchtgas unter Zwischenschaltung eines feine Regelung gestattenden Hahnes und eines Kessels zum Ausgleich von Schwankungen direkt aus der Leitung entnommen und auf gleichem Druck gehalten. Die Messungen wurden zwar dadurch etwas ungenauer; dieser Nachteil wurde indessen ausgeglichen durch den Vorteil, daß längere Versuchsreihen ohne die zur Wiederfüllung des Kessels notwendige Unterbrechung ausgeführt werden konnten. Ein Teil der Messungen wurde zur Nachtzeit gemacht, weil — zu gewissen Zeiten wenigstens — nachts der Gasdruck viel weniger schwankte als tagsüber, bzw. in den Abendstunden. Es wurden die Leitfähigkeiten von  $\frac{1}{100}$ -n-,  $\frac{9}{100}$ -n- und  $\frac{10}{100}$ -n-Flammen von Lithium, Natrium und Kalium gemessen und in Tabelle 9 und (teilweise) in Fig. 15 eingetragen.

Es sind hier die aus den Feld-Strom-Kurven der Fig. 15 gefundenen Leitfähigkeiten (in willkürlich gewählter Einheit) in den mit „ $\lambda_{\text{beob.}}$ “ bezeichneten Spalten eingetragen. Aus den

Tabelle 9.

Metall	$\sqrt{A}$	$1/100 \cdot n.$		$9/100 \cdot n.$			$10/100 \cdot n.^1)$		
		$\lambda_{\text{beob.}}$	$\frac{\lambda_{\text{beob.}}}{\sqrt{A}}$	$\lambda_{\text{beob.}}$	$\lambda_{\text{ber.}}$	$\frac{\lambda_{\text{beob.}}}{\sqrt{A}}$	$\lambda_{\text{beob.}}$	$\lambda_{\text{ber.}}$	$\frac{\lambda_{\text{beob.}}}{\sqrt{A}}$
Li	2,65	4,0	1,5 1,00 rel.	7,7	12,4 3,10 rel.	2,8	8,3	12,5 3,12 rel.	3,1
Na	4,80	7,5	1,55 1,00 rel.	14,0	22,5 3,00 rel.	2,95	15,4 17,6	23,7 3,16 rel.	3,2 3,65
K	6,25	10,0	1,6 1,00 rel.	20,0	32,2 3,22 rel.	3,2	25,0	38,7 3,97 rel.	4,00
$\sqrt{\text{Konzentr. rel.}}$		1,00		3,00			3,16		

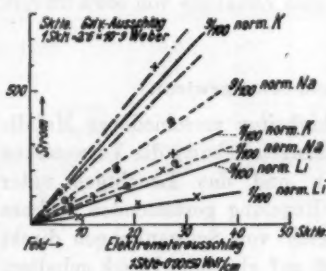


Fig. 15.

für die Natriumflammen gefundenen Werte ergibt sich bei Berücksichtigung des für Natrium bereits festgestellten Quadratwurzelgesetzes (vgl. Tabelle 8) das Verhältnis, in dem die beobachteten Leitfähigkeiten umzurechnen sind, um vergleichbar zu sein. Die so auf gleiches Maß umgerechneten Leitfähigkeiten sind unter „ $\lambda_{\text{ber.}}$ “ eingetragen. Unter diesen stehen die Relativwerte, die sich ergeben, wenn die Leitfähigkeiten der  $1/100$ -normal-Flammen gleich 1 gesetzt werden. Schließlich sind noch in den mit  $\frac{\lambda_{\text{beob.}}}{\sqrt{A}}$  überschriebenen Spalten die Quotienten aus Leitfähigkeit und Wurzel aus dem Atomgewicht des betreffenden Metalls eingetragen. Die Zahlen zeigen: 1. Die Quotienten  $\frac{\lambda_{\text{beob.}}}{\sqrt{A}}$  sind für alle drei Metalle innerhalb eine Vertikalspalte annähernd gleich; es ist also die Leitfähigkeit der Alkalimetallflammen der Quadratwurzel

1) Zwei Beobachtungsreihen.

aus dem Atomgewicht proportional. 2. Die Relativzahlen für die Leitfähigkeiten sind den in der letzten Zeile eingetragenen Relativwerten der Quadratwurzel aus der Konzentration nahe gleich, was die Gültigkeit des Konzentrationsgesetzes auch für Lithium- und Natriumflammen beweist.

#### 6. Leitfähigkeit der Flamme bei gleichzeitigem Vorhandensein zweier Metalle.

Es erschien ferner wünschenswert, zu erfahren, ob die durch die Anwesenheit eines Metaldampfes in der Flamme hervorgerufene Leitfähigkeit durch Hinzubringen des Dampfes von einem andern Metall beeinflusst wird in dem Sinn einer

Änderung der jedem Metall eigentümlichen Elektronenerzeugung, oder ob die Elektronenerzeugungsvorgänge an den Metallatomen unabhängig von der Anwesenheit anderer (gleichartiger oder fremder) Metallatome sind. Es wurden daher in zusammenhängender Meßreihe eine  $1/100$ -normale Lithiumflamme, eine  $1/100$ -normale Natriumflamme und

eine Flamme untersucht, die gleichzeitig  $1/100$ -normal lithiumhaltig und  $1/100$ -normal natriumhaltig war. In Fig. 16 sind die Ergebnisse zweier Meßreihen zusammengefaßt. Die Leitfähigkeiten in relativen Zahlen ergeben sich daraus für die

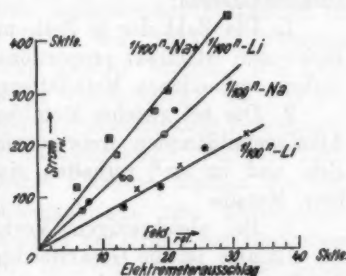


Fig. 16.

Lithiumflamme zu 10 (in willkür. Einheit).

Natriumflamme zu 16,5

(Li + Na) Flamme zu 22,5.

Unter der Voraussetzung, daß die Elektronenerzeugungsvorgänge in einer Metallflamme durch Zusatz fremden Metaldampfes nicht beeinflusst werden, d. h. daß

$$Z_{e(Li + Na)} = Z_{eLi} + Z_{eNa},$$

würde folgen:

$$\text{Leitfähigkeit}_{(Na + Li)} = \sqrt{(\text{Leitf.}_{Li})^2 + (\text{Leitf.}_{Na})^2},$$



was im vorliegenden Fall die Relativleitfähigkeit der (Lithium + Natrium)-Flamme zu 21 willk. Einheiten ergeben müßte. Wie ersichtlich ist, weicht die tatsächlich gefundene Leitfähigkeit von der so berechneten nicht mehr ab, als aus Versuchsfehlern erklärbar ist, was Unabhängigkeit der Elektronenerzeugung am Metallatom von der Anwesenheit anderer Metallatome anzeigt.

#### Zusammenfassung.

Die Ergebnisse der in diesem Teil beschriebenen Untersuchungen lassen sich bei Berücksichtigung der in der Einleitung aufgestellten theoretischen Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Zahl der Elektronenerzeugungen folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Zahl der in Zeit- und Raumeinheit freiwerdenden Elektronen ist direkt proportional der Zahl der in der Raumeinheit vorhandenen Metallatome.

2. Die bei gleicher Metallkonzentration aus verschiedenen Alkalimetalldämpfen freiwerdenden Elektronenzahlen (in der Sek. und im  $\text{cm}^3$ ) verhalten sich wie die Atomgewichte der betr. Metalle.

3. Bei gleichzeitigem Vorhandensein zweier Metalle in der Flamme ist die Gesamtelektronenzahl die Summe der von den Metallen bei alleiniger Anwesenheit gelieferten Elektronenzahlen; es wird also der Elektronenerzeugungsvorgang an den Atomen eines Metalls nicht beeinflußt durch das gleichzeitige Vorhandensein fremder Metallatome.

4. Einige Angaben über Metallatomzahl und spez. Leitfähigkeit seien hier noch zusammengestellt, wenn auch die absoluten Zahlen nicht mit der für die Relativzahlen durchgeführten Genauigkeit gemessen werden können.

Tabelle 10.

	Metallatome im $\text{cm}^3$	Spez. Leitf. $10^{-9} \cdot \frac{1}{\Omega}$	Temperatur ° abs.
Reine Flamme . . . . .	—	0,5—0,8	—
$\frac{1}{100}$ -n. Na-Leuchtgasflamme .	$6,28 \cdot 10^{13}$	10—15	2000
$\frac{100}{100}$ -n. Na-Leuchtgasflamme .	$6,28 \cdot 10^{14}$	100—140	2000
$\frac{100}{100}$ -n. Na-Alkoholflamme .	$7,56 \cdot 10^{14}$	200	2050

## IV. Teil.

## Schlüsse aus den Versuchsergebnissen und Vergleich mit Ergebnissen früherer Untersuchungen.

Aus den in Teil III erhaltenen Ergebnissen seien nun Schlüsse über die Art des Elektronenerzeugungsvorganges gezogen. Darüber hat Hr. Lenard 1905 die Annahme gemacht, daß aus Metallatomen Elektronen dann befreit werden, wenn zwei Atome einander so nahe kommen, daß die Kraftfelder sich teilweise durchdringen, und hat die Erscheinung durch die Bezeichnung „Nähewirkung“ gekennzeichnet.<sup>1)</sup> In der Flamme tritt die erforderliche große Annäherung der Atome bei Gelegenheit der gaskinetischen Zusammenstöße ein; die Berechnung der für die Flamme maßgebenden Stoßzahlen ist von Hrn. Lenard in zwei 1911 bzw. 1914 erschienenen Arbeiten<sup>2)</sup> über Flammenleitung gegeben worden. Das Leitvermögen der reinen Flamme ist wahrscheinlich den aus den metallähnlichen Wasserstoffatomen (vielleicht auch Kohlenstoffatomen) befreiten Elektronen zuzuschreiben. Für das Leitvermögen der metaldampfhaltigen Flammen machen wir, veranlaßt durch unsere Versuchsergebnisse, eine allgemeinere Annahme als die von Hrn. Lenard auf Grund der Ergebnisse der Hrrn. Ebert und Andrade benutzte. Wir nehmen außer Nähewirkung der Metallatome untereinander auch Nähewirkung der Metallatome mit den Flammenmolekülen an. Man hat dann für die Elektronenbefreiungszahl  $Z_e$  die Gleichung:

$$Z_e = c_m q_m n^2 \varphi^2 + c_g q_g n \varphi N + c'_g \cdot q'_g \cdot N^2,$$

wobei im Anschluß an die von Hrn. Lenard eingeführten Bezeichnungen und Definitionen bedeuten soll:

- $c_m$  die sekundliche Stoßzahl eines Metallatoms mit einem Metallatom dividiert durch die Zahl der Metallatome im  $\text{cm}^3$ .
- $c_g$  die sekundliche Stoßzahl eines Metallatoms mit einem Flammengas-Molekül dividiert durch deren Zahl im  $\text{cm}^3$ .

1) Ann. d. Phys. 17. S. 243 ff. 1905. Daß das gute Leitvermögen der Flammen auf Gegenwart schnell wandernder, freier Elektronen beruht, war bereits früher gezeigt worden. (Ann. d. Phys. 9. S. 642. 1902.)

2) Heidelb. Akad. A 34. 1911 und A 17. 1914.

$c_g'$  die sekundliche Stoßzahl eines Moleküls der Flammengase mit seinesgleichen dividiert durch ihre Anzahl im  $\text{cm}^3$ .

$n$  die Zahl der Metallatome im  $\text{cm}^3$ .

$\varphi$  den Bruchteil dieser Zahl, der „aktiv“ ist.

$N$  die Zahl der Flammengasmoleküle im  $\text{cm}^3$ .

$q_m, q_g, q_g'$  die „Emissivitätskonstanten“, d. h. die Zahlen, mit denen die entsprechenden Stoßzahlen zu multiplizieren sind, um die Zahl der freiwerdenden Elektronen zu erhalten, wobei  $q_g$  und  $q_g'$  sich auf alle Flammenmoleküle beziehen sollen, also auch sehr klein sein können, wenn die Zahl der „aktiven“ Flammenmoleküle nicht gleich  $N$  ist.

Man sieht, daß die drei Summanden rechts in der Gleichung für  $Z_e$  die drei als möglich angenommenen Teilvorgänge der Elektronenbefreiung darstellen.

Die in Teil III gefundenen Ergebnisse lassen sich nun so deuten, daß von diesen drei Teilvorgängen der erste und der dritte gegenüber dem zweiten nur sehr geringe Beiträge liefern. Wäre nämlich der erste Vorgang, die Nähwirkung der Metallatome aufeinander, stark in Betracht kommend, so müßte  $Z_e$  proportional dem Quadrat der Metallkonzentration sein. Bei hauptsächlichem Stattfinden des dritten Vorganges müßte die Leitfähigkeit der metallfreien Flamme sehr groß sein und es dürfte die Leitfähigkeitssteigerung durch Einbringen von Metall nicht so groß sein gegenüber dem Leitvermögen der reinen Flamme, wie dies tatsächlich der Fall ist.

Eine Überschlagsrechnung der Stoßzahlen erlaubt zu ermitteln, welche Werte man der Emissivitätskonstanten  $q_m$  zuschreiben müßte, falls ein in unseren Versuchen noch merklicher Bruchteil der freien Elektronen durch Nähwirkung von Metallatom auf Metallatom geliefert werden sollte. Hr. Lenard hat 1914<sup>1)</sup> für die sekundliche Stoßzahl eines Alkalimetallatoms mit seinesgleichen für alle Alkalimetalle einen nahezu gleichen Wert,  $c_m = 7,7 \cdot 10^{-10}$ , berechnet. Für die Stoßzahl der Flammenmoleküle untereinander ergibt sich bei Zugrundelegung der von Hrn. Lenard benutzten Werte  $c_g' = 5 \cdot 10^{-9}$  2); für

1) Heidelb. Akad. A 17. S 10. 1914.

2) Im Anschluß an Hrn. Lenards Verfahren berechnet.

die sekundliche Zahl der Zusammentreffen von Flammenmolekülen und Metallatomen ungefähr der gleiche Wert, wenn als Metall Natrium gewählt wird.

Die für eine Na-Konzentration von  $n = 6 \cdot 10^{14} \frac{\text{akt. Atome}}{\text{cm}^3}$  sich hieraus ergebenden Elektronenbefreiungszahlen sind dann:

$$Z_{e,m} = 3 \cdot 10^{20} q_m \text{ für Nähewirkung zwischen Metall und Metall,}$$

$$Z_{e,g} = 1 \cdot 10^{25} q_g \text{ für Nähewirkung zwischen Metall und Flammengasen,}$$

$$Z_{e,\text{Flamme}} = 6 \cdot 10^{26} q_g' \text{ für Nähewirkung zwischen Flammenmolekülen und Flammenmolekülen.}$$

Dabei ist  $N$  gleich der Zahl sämtlicher Flammengasmoleküle in  $\text{cm}^3$  gesetzt;  $N = 3,5 \cdot 10^{18}$ . Die Gesamtzahl der Elektronenbefreiungen ist:

$$Z_{e,1/100} = 3 \cdot 10^{20} q_m + 1 \cdot 10^{25} q_g + 6 \cdot 10^{26} q_g' \text{ für } 100/100\text{-n.-Flamme,}$$

$$Z_{e,1/1000} = 3 \cdot 10^{16} q_m + 1 \cdot 10^{23} q_g + 6 \cdot 10^{26} q_g'' \text{ für } 1/100\text{-n.-Flamme.}$$

Da die Leitfähigkeit der reinen Flamme nur sehr klein ist gegenüber der der Metallflamme (etwa  $1/10$  der  $1/100$ -n.-Flamme und nur  $1/100$  der Normalflamme), kann man die durch Zusammentreffen von Flammenmolekülen untereinander hervorgerufene Elektronenemission zunächst vernachlässigen, denn sie kann nur den Betrag  $1:\sqrt{100^2-1}$  also  $\frac{1}{99,95}$ , bzw.

$1:\sqrt{100-1} = \frac{1}{99,5}$  ausmachen. Das in den vorliegenden Versuchen festgestellte Quadratwurzelgesetz der Konzentration besagt, daß die bei den  $3 \cdot 10^{20}$  ( $3 \cdot 10^{16}$ ) Stößen zwischen Metallatomen freiwerdende Elektronenzahl gegenüber der bei den  $10^{25}$  ( $10^{23}$ ) Stößen zwischen Metallatomen und Flammenmolekülen nicht in Betracht kommt. Vergleicht man nämlich diese Zahlen für eine  $1/100$ -normale und eine  $1/1$ -normale Natriumflamme, so ergibt sich:

$$Z_{e,1/100} = 3 \cdot 10^{16} q_m + 1 \cdot 10^{23} q_g,$$

$$Z_{e,1/1} = 3 \cdot 10^{20} q_m + 1 \cdot 10^{25} q_g.$$

Die Leitfähigkeitsmessungen ergaben:  $Z_{e,1/100} : Z_{e,1/1} = 1 : 100$ . Wenn nun in der  $1/100$ -n.-Flamme der erste Elektronenbefreiungsvorgang auch nur 1 v. H. der Elektronenmenge lieferte, die

der zweite (Metall und Flammengase) ergibt, was  $q_m = \frac{1}{2} \cdot 10^4$  entspräche, so müßte das Verhältnis:  $Z_{e, \frac{1}{100}} : Z_{e, \frac{1}{1}} = 1 : 200$  sein. Das Verhältnis der Leitfähigkeiten wäre dann 1:14. Bei einer Elektronenlieferung durch die reine Metallwirkung in der Größe von 2 v. H. der Lieferung durch Metall-Gas-Wirkung, also bei  $q_m = \frac{2}{3} \cdot 10^5 q_g$ , wäre  $Z_{e, \frac{1}{100}} : Z_{e, \frac{1}{1}} = 1 : 300$ , das Verhältnis der Leitfähigkeiten 1:17. Selbst wenn man annimmt, daß das Bestehen des Verhältnisses 1:14 (statt 1:10) durch Versuchsfehler verdeckt worden sei (da diese etwa 20 Proz. betragen konnten), hätte dies doch im zweiten Falle (beim Verhältnis 1:17) nicht mehr sein können. Durch die Leitfähigkeitsversuche ist also festgestellt, daß sicher  $q_m < \frac{2}{3} \cdot 10^4 q_g$ . Es ist damit nicht gesagt, daß  $q_m = 0$  sei, daß also gar keine Elektronenerzeugung beim Zusammentreffen zweier Metallatome stattfindet, sondern nur, daß in der Flamme, wo die Zahl solcher Zusammentreffen sehr klein ist gegenüber der Zahl der Zusammentreffen von Metallatomen mit Flammenmolekülen, auch die bei solchen Zusammentreffen erzeugte Elektronenzahl nicht merklich ist gegenüber der bei Zusammentreffen der zweiten Art erzeugten Zahl von Elektronen.

Der Zusammenhang der Leitfähigkeit mit dem Atomgewicht, bzw. der Elektronenerzeugungszahlen mit dem Atomgewicht zeigt an, daß die Emissivitätskonstante dem Atomgewicht direkt proportional ist. Das Steigen der Elektronenabgabe mit steigendem Atomgewicht wurde von Hrn. Lenard schon im Jahre 1905<sup>1)</sup> gefunden und die Proportionalität der Emissivität mit dem Atomgewicht später aus dem von Hrn. Marx gefundenen Quadratwurzelzusammenhang der Atomgewichte mit der („vermeintlichen“) Wanderungsgeschwindigkeit der Elektronen abgeleitet.<sup>2)</sup> Durch die hier mitgeteilten Ergebnisse werden also die Feststellungen Hrn. Lenards durchaus bestätigt. Zu bemerken ist, daß Hr. Wilson<sup>3)</sup> ebenfalls eine Beziehung zwischen der Umladungszahl und dem Atomgewicht abgeleitet hat, wonach die Umladungszahl (bei ihm mit  $f$  bezeichnet) proportional der Quadratwurzel aus dem Atomgewicht ist. Dazu ist aber folgendes zu sagen: Hr. Wilson

1) Ann. 17. S. 231. 1905.

2) P. Lenard, Heidelb. Akad. A 17. S. 25 ff. 1914.

3) Phil. Mag. (6) 21. S. 713. 1911.

hat bei seiner Ableitung die Annahme gemacht, daß die Wanderungsgeschwindigkeit der positiven Träger der Quadratwurzel aus dem Atomgewicht des Metalls umgekehrt proportional sei. Auf die Nichtübereinstimmung dieser Annahme mit den von Hrn. Lenard schon 1900 gegebenen genügend zutreffenden Formeln für die Wanderungsgeschwindigkeit hat schon Hr. Andrade<sup>1)</sup> hingewiesen. Ferner gilt die Wilsonsche Rechnung auch nur für den Fall, daß  $f$  sehr klein gegen eins ist; die von ihm berechneten  $f$ -Werte sind aber z. T. (vgl. a. a. O. S. 716) sehr nahe gleich eins. Außerdem ist die Übereinstimmung der von Hrn. Wilson berechneten  $f$ -Werte mit den durch die experimentellen Ergebnisse geforderten Werten sehr unbefriedigend, also durchaus nicht als Rechtfertigung seiner, wie wir sahen, unzutreffenden Ableitungen anzusehen, so daß im ganzen Hrn. Wilson nicht einmal eine einwandfreie Bestätigung des 6 Jahre früher von Hrn. Lenard schon gut begründeten Ergebnisses des Ansteigens der Elektronenabgabe mit dem Atomgewicht zugeschrieben werden kann.

Die Feststellung, daß die Elektronenemission eines Metaldampfes von der gleichzeitigen Anwesenheit des Dampfes eines anderen Metalls unabhängig ist, bestätigt das aus dem Konzentrationszusammenhang gewonnene Ergebnis, daß Elektronenbefreiung in Metallflammen in überwiegender Maße bei Zusammenstößen der Metallatome mit Flammenmolekülen eintritt.

Gegenüber dem Ergebnis unserer an die Leitfähigkeitsbestimmungen sich anschließenden Überlegungen hat Hr. Andrade<sup>2)</sup> aus seinen Versuchen über die Abhängigkeit der Umladungen vom Druck den Schluß gezogen, daß es sich in der Flamme um Nähewirkung nur zwischen Metallatomen handle.

Der zugrundeliegende, sich allerdings durch seine Einfachheit empfehlende Gedanke war der, daß durch Änderung des Druckes die Zahl  $N$  der Flammenmoleküle geändert und der Einfluß dieser Änderung auf die Elektronenemission durch

1) Vgl. hierzu auch Diss. Andrade, Heidelberg. S. 42. 1911.

2) Diss. Heidelberg. 1911; siehe auch Phil. Mag. (6) 23. S. 865. 1912 und (6) 24. S. 15. 1912; vgl. auch P. Lenard, Heid. Akad. A 34. 1911 und A 17. 1914. Die Untersuchung erfolgte hier in erster Linie mittels der von Hrn. Lenard gefundenen Schiefe des Dampfstreifens im elektrischen Felde.

die in konstant gehaltener Konzentration vorhandenen Metallatome untersucht werden kann. Im Einzelnen sieht man folgendes: Die Bestimmung der Wanderungsgeschwindigkeit nach der Methode des schiefen Dampfstreifens ergibt das Produkt aus der Wechselzahl  $\beta$  und der Wanderungsgeschwindigkeit bei dauernder Ladung des Trägers. Nun gelten für die Größe  $\beta$  die Beziehungen:

Es ist  $n\beta = Q$ , wenn die Flamme elektrisch neutral ist, damit ergibt sich

$$Z_n = c_q r n \beta \cdot Q = c_q r n^2 \beta^2.$$

Nun ist bei Nähwirkung zwischen Metallatomen allein

$$Z_s = c_n q_n n^2 \varphi^2,$$

bei solcher zwischen Metallatomen und Flammenmolekülen dagegen

$$Z_c = c_g q_g n \varphi N,$$

wobei  $N$  die bereits erwähnte Bedeutung hat. Aus diesen Beziehungen und der im Gleichgewichtszustand geltenden Gleichung:

$$Z_s = Z_n$$

ergibt sich für  $\beta$  im

$$\text{ersten Fall: } \beta = \varphi \sqrt{\frac{c_n q_n}{c_q r}},$$

dagegen im

$$\text{zweiten Fall: } \beta = \sqrt{\frac{c_g q_g \varphi N}{c_q r \cdot n}}.$$

Bei Konstanthalten der Metallkonzentration  $n$  ist also  $\beta$  im ersten Fall unabhängig vom Druck, im zweiten Fall dagegen proportional der Quadratwurzel aus dem Druck. Da die Wanderungsgeschwindigkeit der dauernd geladenen Träger dem Druck umgekehrt proportional ist, muß sich für die beobachtbare Wanderungsgeschwindigkeit ergeben:

im ersten Fall  $W_{\text{beob.}}$  proportional  $1/p$ ,

im zweiten Fall  $W_{\text{beob.}}$  proportional  $\frac{1}{\sqrt{p}}.$

Hr. Andrade hat nun bei seinen Untersuchungen das erstere gefunden und in der erwähnten Weise gedeutet. Seine Versuche sind jedoch auf Grund der hier gemachten Er-



fahrungen mit Vorsicht aufzunehmen und etwa wie folgt zu beurteilen:

Was die Methode des schiefen Dampfstreifens anlangt, so erscheint es nach den hier beigebrachten Erfahrungen fraglich, ob sie zur genügend genauen Bestimmung der Größe  $\beta$  geeignet ist, wobei im besonderen fraglich ist, ob die bei der Ableitung der Gleichung für  $\beta$  gemachte Voraussetzung der elektrisch neutralen Flamme genügend erfüllt ist. — Aus unseren Überlegungen (vgl. Einl.) ergibt sich, daß das nur an demjenigen Punkt in der Flamme der Fall ist, wo das Feld ein Minimum aufweist, also am Wendepunkt der Spannungs-kurve. Mißt man das Feld in der Flamme mittels zweier Sonden, so muß außerdem noch vorausgesetzt werden, daß das Feld in dem zwischen den Sonden befindlichen Teil der Flamme konstant ist, eine Bedingung, die immer nur angenähert erfüllt ist und auch nur bei kleinen Feldern, wie sich bei näherer Untersuchung der Feldverhältnisse zeigte (vgl. Teil I). Es ist schon bei einem Betrag des kleinsten Feldwertes von 0,3 Volt/cm die Länge des annähernd linearen Teils des Feldes nicht größer als etwa 3 mm bei 3000 Volt Elektrodenspannung und 40 mm Abstand der gekühlten Kathode von der Anode. Nun sind aber die bei den Dampfstreifenmessungen durch die Sonden angezeigten „Feld“-stärken außerordentlich viel größer. Es ist also sicher, daß bei den von den Hrrn. Ebert, Andrade und Wilckens ausgeführten Sondenmessungen nicht das Feldminimum wirklich gemessen worden ist, ja es ist überhaupt fraglich, ob die Sonden den Ort des Minimums zwischen sich eingeschlossen hatten.<sup>1)</sup> Auf jeden Fall ist also das gemessene „Feld“ viel größer als das wirkliche Feld an dem Orte, wo Neutralität der Flamme statthat. Das läßt sich auch aus der von den genannten Herren beobachteten Abnahme des „Feldes“ mit wachsendem Metallgehalt der Flamme schließen. Diese gibt z. B. Hr. Ebert in Tabelle 13 seiner Abhandlung. Die dazugehörigen Metallkonzentrationen (ausgedrückt durch die Verdampfungsge-  
schwin-

1) Es ist außerdem zu berücksichtigen, daß die Feldmessung bei derartig hohen Feldern und ganz besonders im abgeschlossenen Druckraum sehr große Schwierigkeiten bietet, worauf schon Hr. Lenard hingewiesen hat (vgl. Heidelb. Akad. A 34. S. 5. Anm. 8. 1911).

digkeit) lassen sich aus Kurve 5 a. a. O. entnehmen. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

Tabelle 11.

Verdampfungsgeschw. $\frac{g}{sec} \cdot 10^{-6}$	„Feld“ Volt cm
23,5	190
19,0	330
18,5	350
2,5	590

„Feld“ ist der Quotient aus gemessener Spannungsdifferenz der Sonden und ihrem Abstand.

Ebenso hat auch Hr. Wilckens beobachtet, daß bei Anwesenheit von sehr viel Metall im Dampfstreifen das „Feld“ sehr klein wird.

Nun ist aber nach meinen Messungen das Feld, wenn es an dem Ort des Minimums gemessen wird, nicht abhängig von der Metallkonzentration. Das gleiche hat auch Hr. Wilckens bei Untersuchung der sehr kleinen Felder bei wenigen Volt Elektrodenspannung gefunden (vgl. Diss. Wilckens, S. 14).

Die Elektronen- bzw. Trägerkonzentration beeinflusst nur die Spannungsverteilung und zwar derart, daß bei zunehmender Metallkonzentration sich der annähernd lineare Teil der Spannungskurve mehr und mehr ausbreitet, wobei gleichzeitig der Kathodenfall größer wird. Die Neigung der Kurve im Wendepunkt, also das Feldminimum, wird dagegen nicht geändert. Wendet man dies auf die „Feld“-messungen im Dampfstreifen an, so muß man das dort beobachtete Abnehmen des „Feldes“ mit wachsender Metallmenge der Ausbreitung des nahe linearen Gefälles zuschreiben. Dann ergibt aber die Sondenmessung gar nicht das tatsächlich vorhandene Feld, weil ja die Grundbedingung für die Brauchbarkeit der Doppelsonde, nämlich die Konstanz des Feldes über die von den Sonden umfaßte Strecke, nicht erfüllt ist. Die Änderung des Feldes zwischen den Sonden kann nun in zweierlei Weise erfolgen:

I. Das Feld hat zwischen den Sonden ein Minimum.

II. Die Feldstärke nimmt von der Kathode gegen die Anode zu dauernd ab.

Im ersten Fall ergibt sich für die Beurteilung der Werte folgendes: Es kann das Minimum des Feldes in dem Teil des Dampfstreifens (oder wenigstens in dessen nächster Nähe) liegen, dessen Ablenkung beobachtet wird, also in der Streifenmitte<sup>1)</sup>, oder es kann mehr nach einem Rand des Streifens zu verschoben sein. So lange nun die Metallkonzentration klein ist, ergibt die Sondenmessung immer eine Feldstärke, die größer ist als das Minimumfeld. Für die Berechnung von  $\beta$  ist aber die Kenntnis des Minimumfeldes erforderlich, es wird also im vorliegenden Fall (Minimum in Streifenmitte) eine falsche Feldstärke eingesetzt. Liegt andererseits das Feldminimum nicht in der Nähe der Streifenmitte, so gibt zwar die Sondenmessung das Feld in der Mitte, wo die Ablenkung gemessen wird, einigermaßen richtig wieder (wenn das Feldminimum auf einen kleinen Bereich beschränkt ist — also bei kleinen Metallkonzentrationen), aber es ist in diesem Falle die Neutralitätsbedingung nicht gewahrt für den Ort, der zur Bestimmung von  $\beta$  herangezogen ist.

Der zweite Fall kommt für Beobachtungen am Dampfstreifen nicht in Betracht, da bei seinem Zutreffen die Metallatome dauernd geladen sein müßten, was nicht in Einklang steht mit den Beobachtungen Hrn. Lenards, wonach die Hauptserie stets von neutralen Atomen ausgesandt wird.

Es läßt sich also aus den Beobachtungen Hrn. Andrades über den Zusammenhang der Dampfstreifenschiefe mit dem Druck kein bindender Schluß ziehen, der mit unserer auf Grund der Leitfähigkeitsbestimmungen gemachten Annahme des Elektronenerzeugungsvorganges in Widerspruch stände.

1) Bei Hrn. Ebert wurde die Ablenkung der Streifenachse beobachtet; bei Hrn. Andrade wurde die Streifenablenkung als Differenz der Ablenkungen des Streifenrandes bei Streifen verschiedener Metallkonzentration beobachtet, was ebenfalls die Differenz der Ablenkungen der Streifenachsen ergibt. Bei Hrn. Wilckens ist im Text angegeben, daß der Streifenrand beobachtet wurde; die beigelegte Zeichnung scheint aber darauf hinzudeuten, daß beide Ränder beobachtet wurden und daraus die Ablenkung der Mittellinie gefunden (vgl. Diss. Wilckens S. 20 und Fig. 4).

Hr. Andrade hat allerdings auch Leitfähigkeitsuntersuchungen angestellt, um aus dem Einfluß des Druckes auf die Leitfähigkeit auf die Art der Elektronenbefreiung schließen zu können. Es müßte sich wieder Unabhängigkeit der Elektronenzahl vom Druck ergeben, wenn die Elektronenerzeugung nur dem Zusammentreffen von Metallatomen mit Metallatomen zuzuschreiben wäre, im anderen Falle müßte ein Einfluß des Druckes bestehen. Zur Bestimmung der Leitfähigkeit ging Hr. Andrade<sup>1)</sup> von der Beobachtung aus, daß bei einem zwischen glühenden Elektroden befindlichen, diese jedoch nicht berührenden Dampfstreifen die Stromspannungskurven gerade Linien sind, so daß der Strom als (relatives) Maß der Leitfähigkeit angesehen werden kann. Das trifft für glühende Elektroden insofern zu, als nach späteren Beobachtungen Hrn. Wilckens<sup>2)</sup> das Feld bei nicht zu großen Elektrodenspannungen diesen proportional ist. Hr. Andrade maß nun bei verschiedenen Drucken und bei einer Elektrodenspannung von 100 Volt den Strom in einer Flamme, in die eine Strontiumsalzperle eingeführt war (in der oben angegebenen Weise) und glaubte aus seinen Messungen entnehmen zu können, daß die Leitfähigkeit der Flamme dem Druck umgekehrt proportional sei. Daraus wäre zu schließen, daß die Zahl der Elektronenbefreiungen vom Druck unabhängig ist, da die Leitfähigkeit proportional  $w \cdot \sqrt{\frac{Z_0}{e_0 \tau}}$  ist, wobei  $w$  dem Druck umgekehrt proportional ist. Nun ist aber die von Hrn. Andrade angegebene „Leitfähigkeit“ der Flamme nicht dem Druck umgekehrt proportional, sondern etwa dem Quadrat des Druckes.<sup>3)</sup> Aber auch daraus lassen sich keine sicheren Schlüsse auf die Elektronenbefreiung ziehen, denn es zeigt sich bei kritischer Betrachtung der Andradeschen Versuche in bezug auf die Versuchsbedingungen auf Grund der im vorliegenden ge-

1) Dissert. Andrade S. 46.

2) Dissert. Andrade S. 46.

3) Darauf hat Hr. Marx hingewiesen (vgl. Ann. d. Physik 60. S. 534. 1916), der versucht hat, diesen Zusammenhang zu erklären aus einer Abhängigkeit des Rekombinationskoeffizienten  $\tau$  vom Druck in Anlehnung an die von Hrn. Langevin hierfür gegebenen Beziehungen und unter Benutzung einer Schätzung von  $\tau$  bei Flammentemperatur durch Hrn. Moreau.

sammelten Erfahrungen, daß es nicht möglich ist, daraus einwandfrei einen Schluß auf die Beeinflussung der Leitfähigkeit durch den Druck zu ziehen.<sup>1)</sup> Zunächst ist es hier ebenso wichtig wie bei der Dampfstreifenmethode, die Metallkonzentration konstant zu halten. Während dies von Hrn. Andrade bei den Dampfstreifenbeobachtungen durchgeführt worden ist, fehlen im Fall der Leitfähigkeitsmessungen alle Angaben darüber. War die Metallkonzentration nicht konstant, so mußte bei höheren Drucken die Leitfähigkeit zu klein gefunden werden. Ferner hat Hr. Andrade bei den Versuchen über die Helligkeitsänderung mit dem Druck eine Temperaturerniedrigung um 100° C bei Erhöhung des Druckes von 1 auf 4 Atmosphären festgestellt, wodurch er die Verminderung der Helligkeit erklärt hat. Bei den Leitfähigkeitsversuchen ist aber dieser Temperaturunterschied nicht berücksichtigt. Nach meinen Ergebnissen muß aber damit eine beträchtliche Leitfähigkeitsverminderung verknüpft gewesen sein, die man auf kaum weniger als 100 Proz. schätzen darf. Bei Konstanthalten der Temperatur würde sich bei Hrn. Andrade's Versuchen eine wesentlich größere Leitfähigkeit ergeben haben. Eine weitere Fehlerquelle bildet die Nichtberücksichtigung des Druckeinflusses auf das Feld. Hr. Andrade hat zwar an anderer Stelle (vgl. Diss. S. 65) gefunden, daß das „Feld“ mit dem Druck zunimmt; in welcher Weise jedoch das wirklich maßgebende Feld vom Druck abhängt, läßt sich nach dem über die Sondenmessung Gesagten aus diesen Angaben nicht entnehmen. Es läßt sich also auch nicht sagen, ob es bei Druckänderung berechtigt ist, die Leitfähigkeit aus der Stromspannungskurve abzuleiten, da sie durch den Ausdruck  $\frac{J}{F}$  gegeben ist (Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes vorausgesetzt). Zu all diesen Unsicherheiten kommt noch, daß man nichts weiß über die Abhängigkeit des Ausdrucks  $c_p r$ , d. h. der Größe  $r$  vom Druck. Die Leitfähigkeit müßte bei Konstanthalten aller Versuchsbedingungen bei Nähewirkung der ersten Art proportional  $\frac{1}{p \sqrt{r}}$  sein, bei Nähewirkung zwischen Metall-

1) Auf die Unzulänglichkeit dieser Versuche ist auch schon von Hrn. A. Becker, Graetz' Handbuch III. S. 470. 1919 hingewiesen worden.

atomen und Flammenmolekülen proportional  $\frac{1}{\sqrt{p \cdot r}}$ . Der Zusammenhang zwischen  $r$  und dem Druck ist aber noch nicht einmal bei gewöhnlicher Temperatur einwandfrei bekannt<sup>1)</sup>, und noch viel weniger bei den in der Flamme herrschenden Temperaturen, so daß auch hierdurch die Druckabhängigkeit der Leitfähigkeit mit einem unsicheren Faktor behaftet ist.

Die Versuche Hrn. Andrade's, die Mitwirkung der Flammenmoleküle bei der Elektronenerzeugung als nicht vorhanden nachzuweisen, müssen demnach als unzureichend bezeichnet werden, soweit sie sich auf Leitfähigkeit beziehen.<sup>2)</sup> Aber auch aus den Beobachtungen der Dampfstreifenschiefe in Abhängigkeit vom Druck kann, wie gezeigt, kein unsere Ergebnisse widerlegender Schluß gezogen werden.

Ein anderer bei Versuchen am Dampfstreifen nahe liegender einfacher Gedanke zur Erforschung der Vorgänge im Streifen war der, durch Änderung der Metallmenge im Streifen die Elektronenerzeugung zu ändern und den Einfluß auf die Umladungszahl zu untersuchen. Diese Untersuchungen wurden durch Hrn. Ebert<sup>3)</sup> ausgeführt. Es ergab sich aber Unabhängigkeit der beobachteten Wanderungsgeschwindigkeit von der Konzentration nur innerhalb eines gewissen Konzentrationsbereichs (der „Grenzzone“), außerhalb dessen sie stark mit der Konzentration ansteigt. Diese Erscheinung wurde von Hrn. Lenard<sup>4)</sup> auf das Vorhandensein von Kernen in der Flamme in beschränkter Zahl zurückgeführt, kann also über den Zusammenhang von Metallgehalt und Elektronenerzeugung keinen Aufschluß geben, und steht also auch mit den Ergebnissen der Leitfähigkeitsbestimmungen nicht in Widerspruch. Es sei nur kurz noch darauf hingewiesen, daß auch hier die Möglichkeit besteht, daß die kleinen Werte der Wanderungsgeschwindigkeit bei kleiner Metallkonzentration z. T. durch falsche Feldwerte vorgetäuscht sind, wodurch der Einfluß der von

1) Vgl. R. Seeliger, Graetz' Handbuch d. El. u. Magn. III. S. 381.

2) Wohl dementsprechend sind Schlüsse aus Hrn. Andrade's Leitfähigkeitsmessungen schon von Hrn. Lenard (Heid. Akad. A 34. 1911 und A 17. 1914) außer acht gelassen worden.

3) Diss. Heidelberg. 1911.

4) Heidelberg. Akad. A 17. S. 31 ff. 1914.

Hrn. Lenard auch auf anderem Wege festgestellten Kerne verstärkt erscheint.

Mit einigen Worten sei nun noch auf die von Hr. E. Marx<sup>1)</sup> eingeführte Hypothese der lichtelektrischen Elektronenbefreiung in der Flamme eingegangen. Eine Anzahl von Bedenken gegen das Zutreffen dieser Annahme ist schon von Hr. Lenard<sup>2)</sup> und Hr. Becker<sup>3)</sup> vorgebracht worden, so daß hier mit Bezug auf die im Vorliegenden gewonnenen Ergebnisse nur kurz folgendes hinzuzufügen ist. Nach Hr. Marx soll die lichtelektrische Elektronenabgabe der Alkalimetallatome in der Flamme als „Sättigungsabgabe“ aufgefaßt werden. Dadurch sucht Hr. Marx der darin liegenden Schwierigkeit zu entgehen, daß durch äußere Lichtquellen keine bemerkbare Zunahme der Elektronenbefreiung zu erreichen ist.<sup>4)</sup> Es kann dann keine Beziehung zwischen der Emissivitätskonstanten  $q$  und der Stärke der elektromagnetischen Strahlung der Flamme bestehen (vgl. hierzu Anm. 3). Mithin dürfte auch kein Einfluß der Flammentemperatur auf die Elektronenbefreiung statthaben, der aber nach den vorliegenden Ergebnissen sehr stark ist (vgl. hierzu Teil III, Abschn. 4). Es bietet also in dieser Hinsicht die vorliegende Untersuchung keinen Anlaß zur Annahme der lichtelektrischen Hypothese, obwohl der Zusammenhang der Leitfähigkeit mit der Metall-

1) Ann. d. Phys. 50. S. 521. 1916; Handb. d. Rad. Bd. IV. S. 712; Ann. d. Phys. 65. S. 657. 1921.

2) P. Lenard, 4. Tätigkeitsbericht des Rad. Instituts der Univ. Heidbg. El.-Techn. Ztschr. Heft 41. 1916.

3) A. Becker, „Flammenleitung“ in Graetz' Handb. III. S. 508.

4) Vgl. Anm. 2), sowie auch bereits von Hr. Marx selbst angestellte Versuche (Ann. d. Physik 2. S. 785. 1900). Man könnte fragen, woher es kommt, daß keinerlei deutliche Zeichen von lichtelektrischer Wirkung auf die freien, und nach Hr. Lenards Nachweis stets zum Teil elektrisch neutralen Metallatome der Flamme auffindbar sind, während doch das freie feste Metall starke lichtelektrische Wirkung zeigt. Vielleicht liegt die Antwort darin, daß die starke lichtelektrische Wirkung bei nicht sehr kurzen Wellen gar nicht den freien Atomen zugehört, sondern vielmehr den mit fremden (Gas-) Atomen in loser Bindung befindlichen Atomen festen Metalls, bzw. in Metalleddämpfen den bei nicht sehr hoher Temperatur stets, jedoch nur in beschränkter Anzahl, vorhandenen komplexen Metallmolekülen.



konzentration tatsächlich der gleiche ist, wie er sich nach Hrn. Marx' Hypothese ergeben müßte.

Ferner ist zu beachten, daß für die Lichtemission<sup>1)</sup> metall-dampfhaltiger Flammen die gleiche Konzentrationsabhängigkeit besteht, wie für die Elektronenemission. Da aber die Erregung der Lichtemission den Zusammenstößen der Metallatome mit den Flammenmolekülen<sup>2)</sup> zuzuschreiben ist, liegt es nahe, auch die Elektronenemission der gleichen Ursache zuzuschreiben, wobei der Unterschied in der verschiedenen Häufigkeit von Lichtemission und Elektronenemission besteht. Es ist jedenfalls die Kenntnis von der Lichterregung als starke Stütze für die Nähwirkungsvorstellung der Elektronenbefreiung anzusehen. Hrn. Marx' lichtelektrische Theorie kann durch die formale Übereinstimmung mit der hier festgestellten Konzentrationsabhängigkeit der Leitfähigkeit nicht gestützt werden, denn die Entwicklungen dieser Theorie sind durch die Benutzung allzu undeutlicher Vorstellungen (wie z. B. die der „Diffusion negativer Elektronen“ bei Atmosphärendruck in der Flamme, vgl. Ann. 65. S. 665. 1921) und nicht genügend scharf definierter Begriffe (wie z. B. der „Emissivität“ in lichtelektrischer Auffassung) in ihrem Werte stark beeinträchtigt. Es erscheint vorteilhafter, auf Grund der neu gewonnenen Erkenntnisse die Theorie der Flammenleitung in möglichst einfacher Weise neu aufzubauen, wobei die von Hrn. Lenard gegebenen Entwicklungen benutzbar bleiben nur mit Ausschaltung der Annahme, daß die Elektronenbefreiung hauptsächlich der Nähwirkung nur zwischen Metallatomen zuzuschreiben sei.<sup>3)</sup>

#### Zusammenfassung.

1. Es werden die Bedingungen aufgestellt für einwandfreie und zu Schlüssen auf die Elektronenerzeugungsvorgänge

1) M. Gouy, Thèse, Paris 1879 u. Ann. de Phys. (5) 18. S. 5. 1879.

2) P. Lenard, Heid. Akad. A 34. S. 19 ff. 1911 u. A 17. S. 51 ff. 1914.

3) Schon Herr A. Becker hat in seinem Bericht über Flammenleitung und deren Theorie (Graetz' Handbuch der Elektr. u. d. Magn. Bd. III. S. 508. 1919) hervorgehoben, daß die von Hrn. Lenard entwickelte Theorie in ihren Grundlagen gesichert erscheine, während die auf Grund der im Vorliegenden als nicht genügend einwandfrei erwiesenen Andradeschen Beobachtungen gemachte besondere Annahme über die Ursache der Elektronenbefreiung noch der weiteren Prüfung bedürfe.

verwertbare Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit metaldampfhaltiger Flammen unter Ausschaltung der Elektrodenwirkung. Sie sind folgende: Der Strom, der durch die eine Elektrode in die Flamme eintritt, muß ohne Verlust durch die andere Elektrode wieder austreten; außerdem muß die Stromdichte über die ganze Länge der Strombahn gleich sein. Es muß eine Stelle vorhanden sein, wo Gleichheit der positiven und negativen Trägerzahl, also Neutralität der Flamme als Ganzes herrscht. Als Merkmal des Vorhandenseins einer solchen Stelle ist das Auftreten eines Feldminimums anzusehen.

2. Prüfung verschiedener Formen von Elektrodenanordnungen auf die Erfüllung dieser Bedingungen ergibt:

Elektrodenanordnungen, in denen der Brenner einen Fremdkörper darstellt (aufrechte Platten- und Zylinderelektroden bei wagrechter Brennermündungsebene) bieten keine geeigneten Feldverhältnisse (Fehlen des Minimums) und zeigen Abhängigkeit der Stromdichteverteilung von der Spannung. Als einwandfrei in bezug auf die Feldverteilung ergibt sich eine Anordnung, bei der die breite Brennermündungsebene die eine Elektrode darstellt, der eine geeignet gebaute wagrechte Elektrode gegenüber gestellt wird. Genaue Bestimmbarkeit der Stromdichte in der Elektrodenebene wird gewährleistet durch Verwendung einer Schutzringanordnung. Diese Elektrode wird durch eine geeignete Vorrichtung gekühlt, und es wird nachgewiesen, daß bei den Messungen nur im Flammenvolumen erzeugte Elektronen an der Elektrizitätsleitung beteiligt sind.

3. Neubearbeitung der Sonden-Feldmeßweise nach Aufdeckung bisher nicht genügend beachteter Fehlerquellen, die bei kleinen Feldern wichtig werden, wobei zu bemerken ist, daß gerade die Anwendung kleiner Felder von besonderer Wichtigkeit ist für die Untersuchung der Hauptvorgänge bei der Flammenleitung. Es werden die bisher von anderen Verfahrenern mit Sonden ausgeführten Feldmessungen besprochen mit Rücksicht auf die Beachtung der angegebenen Fehlerquellen.

4. Auch die Leitfähigkeitsbestimmung durch Strommessung bei bekanntem Feld unterliegt Fehlerquellen, die besonders untersucht und berücksichtigt sind.

5. Die Ergebnisse der Leitfähigkeitsmessungen sind folgende:

a) Die Leitfähigkeit der Alkalimetallflammen ist proportional der Quadratwurzel aus der Metallkonzentration.

Hierzu ist zu bemerken, daß eine solche Abhängigkeit schon von Hrn. Arrhenius<sup>1)</sup>, später auch von den Hrn. Wilson, Dawson und Smithells<sup>2)</sup> und von Hrn. Moreau<sup>3)</sup> gefunden wurde. Hr. Lenard hat aber in seinen Untersuchungen über den Mechanismus der Elektrizitätsleitung in Flammen (1911 und 1914) gezeigt, daß dieses Ergebnis der oben genannten Verfasser dem Mitwirken der Elektronenerzeugung durch die von ihnen benutzten glühenden Elektroden zugeschrieben werden kann und darauf hingewiesen, daß die Elektronenerzeugung im Volumen der Flamme einwandfrei nur dann beobachtet wird, wenn die Möglichkeit der Elektrodenmitwirkung ausgeschlossen ist. In der vorliegenden Arbeit ist einwandfrei gezeigt, daß das Quadratwurzelgesetz der Konzentration auch bei Ausschaltung von Elektrodenwirkung gültig ist, und damit die Möglichkeit zu unzweifelhaften Schlüssen auf die Vorgänge im Flammeninnern gegeben.

b) Die Leitfähigkeit der Alkalimetallflammen ist proportional der Quadratwurzel aus dem Atomgewicht des Metalls.

c) Die Leitfähigkeit, die durch den Dampf eines Alkalimetalls erzeugt wird, ist unabhängig von der gleichzeitigen Anwesenheit des Dampfes eines anderen Metalls.

d) Die Leitfähigkeit der Alkalimetallflammen zeigt einen starken Gang mit der Temperatur.

6. Die aus diesen Ergebnissen zu ziehenden Schlüsse sind folgende:

a) Die Elektronenerzeugung in metaldampfhaltigen Flammen ist proportional dem Metallgehalt; sie findet statt beim Zusammentreffen der Metallatome mit den Flamm-molekülen durch Nähwirkung zwischen diesen. Nähwirkung zwischen Metallatomen untereinander, die besonders nach den Arbeiten Hrn. Andrade's hauptsächlich wirksam zu sein

1) Wied. Ann. 42. S. 18. 1891.

2) Proc. Roy. Soc. A 65. S. 120. 1899; Phil. Trans. 192. S. 499. 1899.

3) C. R. 135. S. 898. 1926. 1902; Ann. Chim. Phys. 30. S. 5. 1903.

schien, kam nicht zur Geltung (ohne daß man sagen könnte, daß sie unwirksam sei).

b) Die Emissivitätskonstante der Alkalimetalle ist proportional dem Atomgewicht. Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit früheren Feststellungen Hrn. Lenards.

c) Es wird gezeigt, daß aus den Untersuchungen der Hrn. Ebert, Andrade und Wilckens über die Schiefe des Dampfstreifens im elektrischen Feld keine Einwände gegen die hier gezogenen Schlüsse hergeleitet werden können.

d) Außer anderem macht die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit ein Zutreffen der lichtelektrischen Hypothese Hrn. Marx' sehr unwahrscheinlich, obgleich diese die gleiche Konzentrations- und Atomgewichtsabhängigkeit der Leitfähigkeit ergibt, welche wir als tatsächlich bestehend nachgewiesen haben.

Vorstehende Arbeit wurde in der Zeit von S.-S. 1919 bis W.-S. 1922/23 im radiologischen Institut der Universität Heidelberg auf Anregung und unter Leitung der Hrn. Geheimrat Prof. Dr. Lenard und Prof. Dr. Becker ausgeführt. Ich möchte auch an dieser Stelle für mannigfache Beratung und Förderung meinen besten Dank aussprechen.

Danzig-Langfuhr, Physik. Institut. d. Techn. Hochschule,  
Januar 1924.

## 2. Flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie; von Kornel Lanczos.

Hr. Sen hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit<sup>1)</sup> eine Frage behandelt, die einer allgemeineren, von mir noch im Jahre 1921 angeschnittenen und Anfang 1922 abgeschlossenen Untersuchung untergeordnet ist. Ich hatte damals die fertige Arbeit unter dem Titel: „Untersuchung über flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie“ (Febr. 1922) an die „Annalen der Physik“ eingesandt, später aber, durch Gründe äußerer Art veranlaßt, von der ausführlichen Publikation Abstand genommen und mich darauf beschränkt, die gewonnenen Resultate im Rahmen einer anderen Arbeit<sup>2)</sup>, die mir gleich Gelegenheit zu ihrer Anwendung bot, zu veröffentlichen, in der Annahme, daß die mathematischen Zwischenrechnungen von jedem, der für die Frage Interesse hat, ohne Schwierigkeiten nachgeholt werden könnten. Die von Hrn. Sen in Betracht gezogene Frage, „welche von solchen Unstetigkeiten bloße mathematische Unstetigkeiten sind und welche einen physikalischen Ursprung haben“, wird mit aller Deutlichkeit beantwortet (a. a. O., S. 541, Punkt 2). Es scheint mir jetzt, daß die Kürze meiner Mitteilung zu Mißverständnissen Veranlassung gegeben hat. Denn Hr. Sen beruft sich in seiner Arbeit folgendermaßen auf meine Publikation (S. 366): „Diese Arbeit betrifft die Entscheidung dieser Frage, die noch nicht systematisch behandelt worden ist. In einer Arbeit von Lanczos (Zitat), die vor kurzem erschienen ist, und ein anderes Problem behandelt, kommt einmal die Frage vor. Lanczos

1) Zugleich Entgegnung auf die Arbeit des Hrn. N. Sen: „Über die Grenzbedingungen des Schwerefeldes an Unstetigkeitsflächen“, *Ann. d. Phys.* 73. S. 365—396. 1924.

2) Verf., *Physik. Zeitschr.* 23. S. 539—543. 1922. Im folgenden als a. a. O. zitiert.

ent als Antwort einige Gleichungen aufgestellt, die sich alle auf ein bestimmtes Koordinatensystem beziehen, das nach Lanczos eine physikalische Bedeutung haben soll. Die Durchführung der betreffenden Transformation wird jedenfalls analytische Schwierigkeiten machen. In dieser Arbeit ist keinem Koordinatensystem ein Vorzug gegeben, und die Resultate sind absolut allgemein. Die Idee einer „metrischen Belegung“ in einem Koordinatensystem, das nicht (nach der Bezeichnung von Lanczos) normal ist, wird überflüssig, und nach den Gleichungen (II) läßt sich unsere Frage ohne eine vorher erforderliche Koordinatentransformation beantworten.“ — In Wirklichkeit sind die von mir gegebenen Gleichungen sämtlich Tensorgleichungen und gelten daher in jedem beliebigen Koordinatensystem. Außerdem enthalten sie die Schlußresultate einer mathematisch eindeutig vorgeschriebenen Entwicklung, welche bei Sen nur in ihren Anfangsgründen ausgearbeitet wird. Nicht nur zur Aufklärung dieses Irrtums<sup>1)</sup>, sondern hauptsächlich, weil der Möglichkeit einer flächenhaften Materieverteilung vom Standpunkt einer allgemeinen Theorie der Materie aus eine prinzipielle Bedeutung zukommen kann und zugleich die Frage nach den allgemeinen Grenzbedingungen des Schwerfeldes an Unstetigkeitsflächen beantwortet wird, soll der Weg, auf dem ich zu meinen bereits veröffentlichten Resultaten gekommen, im folgenden kurz skizziert werden.

1.

Wir nehmen den Maßtensor überall im betrachteten Gebiet stetig an, während gewisse Grenzflächen existieren sollen, an denen die Ableitungen, genommen in einer Richtung, welche nicht in die Fläche selbst fällt, einen Sprung erleiden. Es ist

1) Der Irrtum des Hrn. Sen entspringt wahrscheinlich dem Umstande, daß ich von einer „Normalform der Belegung“ gesprochen und bereits in derselben Nummer der Zeitschrift ein spezielles Koordinatensystem behandelt habe (ohne es in der hier in Frage kommenden Arbeit anzuwenden), welche ich später mit Rücksicht auf seine exceptionalen Rolle bei Randwertaufgaben und für die allgemeine Integration der Feldgleichungen als „Normalkoordinatensystem“ bezeichnete. An Stelle dieser nicht glücklich gewählten Bezeichnung würde ich jetzt lieber die Benennung „isopotentialen Koordinatensystem“ vorziehen, da dasselbe dadurch charakterisiert ist, daß die Parameterflächen  $\alpha_i = \text{const.}$  je ein System von Niveauflächen konstanten Potentials bilden.

klar, daß nicht sämtlichen  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}$  ein beliebiger Sprung zu kommen kann. Begeben wir uns in ein Koordinatensystem in dem die Parameterfläche  $x_1 = 0$  die betrachtete Grenzfläche ist, (einfach durch die Transformation:

$$(1) \quad x_1' = F(x_1, \dots, x_4),$$

wenn:

$$(2) \quad F(x_1, \dots, x_4) = 0$$

die Gleichung der Fläche ist), so bleiben sämtliche

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_2} \quad \text{bis} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_4}$$

infolge der Stetigkeit des Maßtensors auf der Fläche stetig ihre Differenz nach zwei entgegengesetzten Richtungen null also verschwinden:

$$(3) \quad \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_2} \right]_1 = \dots = \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_4} \right]_1 = 0.$$

Es können nur die 10 Größen:

$$\left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_1} \right]_1,$$

von 0 verschieden ausfallen. Das jetzt gebrauchte Koordinatensystem wollen wir im folgenden als „Koordinatensystem (1)“ bezeichnen.

Es ist also klar, daß die 40 Größen  $\left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} \right]_1$  immer auf 10 reduzierbar sein müssen. Das können wir leicht allgemein von einem beliebigen Tensor  $T_{ik}$  zeigen, der an einer Grenzfläche in seinen Ableitungen Diskontinuitäten erleiden soll. Bilden wir nämlich seinen kovarianten Differentialquotienten [bezeichnet mit  $(T_{ik})_i$ ] nach zwei entgegengesetzten Richtungen und nehmen ihre Differenz:

$$(4) \quad [(T_{ik})_1]_1 - [(T_{ik})_1]_2 = S_{ik1},$$

so reduziert sich dieser Tensor dritten Grades auf die Differenz

$$(5) \quad S_{ik1} = \left[ \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_1} \right]_1 - \left[ \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_1} \right]_2 = \left[ \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_1} \right]_1.$$

Die noch zu beiden Gliedern hinzukommenden Klammerausdrücke fallen nämlich bei der Differenzbildung heraus, weil sie nur die an und für sich stetigen und darum auf beiden Seiten gleichen  $T_{ik}$  enthalten. Wir sehen also, daß die Größen



$\left[\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\right]_1$  die Komponenten eines Tensors dritter Ordnung bilden.

Derselbe reduziert sich aber auf einen Tensor zweiter Ordnung, indem er sich als Produkt aus einem Tensor  $P_{ik}$  und der Flächennormale  $v_i$  darstellen läßt (a. a. O., S. 540, Punkt 1):

$$(6) \quad \left[\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\right]_1 = P_{ik} v_i.$$

Das Bestehen dieser Gleichung erkennen wir daraus, daß infolge des Tensorcharakters beider Seiten der Beweis in einem beliebigen Koordinatensystem gestattet ist. Begeben wir uns aber in unser früheres Koordinatensystem (1), so verschwinden für alle  $l \neq 1$  beide Seiten identisch: die linken Seiten infolge der Stetigkeit von  $T_{ik}$  auf der Fläche  $F$ , die rechten Seiten, weil jetzt  $v_2$  bis  $v_4 = 0$  ist. Die übrigbleibenden Gleichungen können zur Bestimmung von  $P_{ik}$  dienen.

Die Bedeutung dieses Tensors  $P_{ik}$  ist sehr einfach zu geben. Multiplizieren wir die Gl. (6) mit  $v^i$ , so erhalten wir wegen der Beziehung (a. a. O., S. 540):

$$(7) \quad v_i v^i = 1$$

folgende Darstellung für  $P_{ik}$ :

$$(8) \quad P_{ik} = \left[\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\right]_1 v^i.$$

Wir führen nun im Anschluß an die Potentialtheorie den Begriff der „Ableitung nach der Normale“ ein. Wir bilden nämlich folgenden Tensor:

$$(T_{ik})_{,i} v^i.$$

In der euklidischen Geometrie ist ja:

$$(T_{ik})_{,i} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i},$$

und wir kommen dann in der Tat auf den üblichen Ausdruck. Diesen Tensor (der übrigens für Tensoren beliebig hoher Ordnung genau nach demselben Schema zu bilden ist), bezeichnen wir mit  $\frac{\partial T_{ik}}{\partial v}$ . Es sei also:

$$(9) \quad \frac{\partial T_{ik}}{\partial v} = (T_{ik})_{,i} v^i.$$

Da nun die Fläche  $F$  zwei Seiten hat und dementsprechend auch zwei einander entgegengesetzt gerichtete Normalen<sup>1)</sup>,  $v$  und

1) Die Normale soll immer nach dem Innern der jeweils betrachteten Umgebung gerichtet sein.

$v''$ , so können wir die Ableitung nach der einen und nach der anderen Normale bilden und ihre Summe nehmen:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial v'} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial v''}.$$

In regulären Punkten verschwindet diese Summe, da ja  $v'' = -v'$  ist. Befinden wir uns aber auf einer Unstetigkeitsfläche, so stellt dieser Ausdruck den *Sprung* in der Ableitung nach der Normale vor und wir erhalten unter Berücksichtigung der Gl. (4) und (5):

$$(10) \quad \frac{\partial T_{ik}}{\partial v'} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial v''} = \left[ \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \right]_2 v''.$$

Ein Vergleich mit Gl. (8) zeigt, daß wir damit die Bedeutung des Tensors  $P_{ik}$  gefunden haben. Er stellt die Diskontinuität in der Ableitung nach der Normale dar und alle Diskontinuitäten in den Differentialquotienten lassen sich infolge der Gl. (6) auf diesen Tensor zurückführen. Ich habe diese Größe — allerdings noch multipliziert mit  $1/2$ , was sich für das Folgende als zweckmäßig erweist —, mit einem der Potentialtheorie entlehnten Ausdruck als „Belegung“ bezeichnet.

Wir haben hier einen beliebigen Tensor  $T_{ik}$  in Betracht gezogen und den Fundamentaltensor selber stillschweigend als regulär vorausgesetzt. Doch gilt das Gesagte genau so auch für den metrischen Tensor  $g_{ik}$ . Wir werden hier für den Sprung in der Ableitung nach der Normale zweckmäßigerweise den Ausdruck: „metrische Belegung“ gebrauchen dürfen. Ich habe dafür die Bezeichnung  $G_{ik}$  gewählt, setzte also:

$$(11) \quad G_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial v'} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial v''} \right).$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (6) werden wir somit den Sprung in den einzelnen Differentialquotienten folgendermaßen darstellen haben:

$$(12) \quad \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} \right]_2 = 2 G_{ik} v_i.$$

## 2.

Um den prinzipiellen Unterschied zwischen räumlich verteilter und flächenhaft verteilter Materie zu erkennen und den Übergang vom ersteren Fall zum letzteren vorzunehmen, ist es am naturgemähesten, uns an die bekannten Entwicklungen

der Potentialtheorie anzuschließen. An materiefreien Stellen des Raumes haben wir immer die Laplacesche Gleichung:

$$(13) \quad \Delta \varphi = 0.$$

Bei volumenhaft verteilter Materie tritt an ihre Stelle an mit Materie besetzten Punkten die Poissonsche Gleichung:

$$(14) \quad \Delta \varphi = -4\pi \varrho_v,$$

wobei  $\varrho_v$  die räumliche Dichte der Materie bedeutet. Bei flächenhafter Verteilung der Materie wird der Gültigkeitsbereich der Laplaceschen Gleichung nirgends durchbrochen. Nur gibt es außer den regulären Punkten des Raumes noch gewisse singuläre Flächen, wo die Potentialfunktion selber wohl auch noch stetig bleibt, ihre Ableitung nach der Normale aber einen Sprung erleidet. Diese funktionentheoretische Singularität findet ihre physikalische Deutung als flächenhaft verteilte Materie. An Stelle der Poissonschen Gleichung tritt die Gleichung von Gauß:

$$(15) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y''} = -4\pi \varrho_f,$$

wobei  $\varrho_f$  jetzt die Flächendichte der Materie bedeutet. Um von der Poissonschen Gleichung zur Gaußschen zu gelangen, denken wir uns die räumliche Materie in eine unendlich dünne Schicht zusammengedrängt und setzen:

$$(16) \quad \int \varrho_v dv = \int \varrho_f df,$$

wenn  $dv$  das Volumelement,  $df$  das Flächenelement bezeichnet. Setzen wir nun den Wert von  $\varrho_v$  aus der Poissonschen Gleichung ein und formen das Raumintegral in ein Flächenintegral um, so erhalten wir die Gaußsche Gleichung, indem wir die Integranden auf beiden Seiten gleichsetzen, da die Ausdehnung der Fläche beliebig sein kann.

Genau so können wir auch mit den entsprechenden Gleichungen der Einsteinschen Theorie vorgehen. Der Poissonschen Gleichung entspricht hier das Fundamentalgleichungssystem des Gravitationsfeldes:

$$R_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T. \quad ^1)$$

1) Wir messen dabei die Massen in natürlichen Einheiten, also in cm, nach der Umrechnung:  $1 g = 1,87 \cdot 10^{-27}$  cm, setzen also den üblichen Faktor  $\kappa = 1$ .

Nur ist es hier nicht möglich, für alle Terme des Krümmungstensors die Umformung des Raumintegrals in ein Flächenintegral vorzunehmen. Man kann sich aber leicht überzeugen, daß dieses für die ersten Differentialquotienten auch gar nicht nötig ist, da dieser Teil des Integrals beim Übergang zu einer unendlich dünnen Schicht dem Grenzwert 0 zustrebt. Die zweiten Differentialquotienten aber lassen tatsächlich die Gaußsche Integraltransformation zu.

Wir schreiben die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors in folgender Form auf:

$$(17) \quad R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} i k \\ s \end{matrix} \right\} \right] + K,$$

wobei in der Größe  $K$  nur erste Differentialquotienten vorkommen. Multiplizieren wir mit dem Volumelement:

$$dv = \sqrt{g} dx_1 \dots dx_4,$$

so läßt sich der in Frage kommende erste Term in ein Flächenintegral umwandeln. Nun setzen wir in Analogie zu (16) die Gleichung an:

$$(18) \quad \int (T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T) dv = \int (\mathfrak{T}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \mathfrak{T}) df,$$

wobei  $\mathfrak{T}_{ik}$ , wie bei Hrn. Sen, den Materietensor der flächenhaft verteilten Materie bedeuten soll. Die Gaußsche Integraltransformation und Gleichsetzung der Integranden auf beiden Seiten führt dann zu folgender Beziehung:

$$(19) \quad \mathfrak{T}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i} \right]_k v_k - \left\{ \begin{matrix} i k \\ s \end{matrix} \right\}_2 v_s.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt mit der linken Seite der Gl. (II) des Hrn. Sen überein.<sup>1)</sup> Nur haben wir es noch keineswegs mit einem Endresultat zu tun, sondern müssen auf der rechten Seite den Sprung in den Differentialquotienten auf den Tensor der „metrischen Belegung“ zurückführen, wofür wir nur die

1) Für die linke Seite der Gleichung (19) schreibt Hr. Sen (S. 374) einfach  $\mathfrak{T}_{ik}$  und es fehlt bei ihm das abzuziehende  $\frac{1}{2} g_{ik} \mathfrak{T}$ . Solange es wie bei ihm, nur auf das Verschwinden des Tensors  $\mathfrak{T}_{ik}$  ankommt, ist der Unterschied unwesentlich. Soll aber  $\mathfrak{T}_{ik}$  tatsächlich den Materietensor der flächenhaft verteilten Materie darstellen, so kann die Gl. (19) nur in der hier angegebenen Form richtig sein.

Gl. (12) anzuwenden haben. Für den Sprung in den Christoffelschen Dreiindizesymbolen finden wir mit Leichtigkeit:

$$(20a) \quad \left[ \begin{smallmatrix} i & k \\ l \end{smallmatrix} \right]_2 = G_{il} v_k + G_{kl} v_i - G_{ik} v_l$$

und daraus:

$$(20b) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ l \end{smallmatrix} \right\}_2 = G_i^l v_k + G_k^l v_i - G_{ik} v^l.$$

Der Tensorcharakter von  $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ l \end{smallmatrix} \right\}_2$  — und zwar kovariant in bezug auf  $i, k$ , kontravariant in  $l$  — ergibt sich aus dieser Darstellung unmittelbar, ohne besonders erforderliche Rechnungen. Weiterhin haben wir:

$$(21) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i} \right]_2 = \frac{1}{2g} \left[ \frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right]_2 g^{rs} = G_{rs} g^{rs} v_i = G v_i,$$

indem wir, wie üblich:

$$G_{rs} g^{rs} = G_s^s = G$$

setzen. Führen wir diese Werte in (19) ein, so erhalten wir folgende Beziehung:

$$(22) \quad \mathfrak{X}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \mathfrak{X} = G v_i v_k + G_{ik} - G_i^s v_s v_k - G_k^s v_s v_i.$$

Wir führen jetzt einen Vektor  $F_i$  ein durch folgende Gleichung:

$$(23) \quad F_i = (G_{is} - \frac{1}{2} g_{is} G) v^s.$$

Mit seiner Hilfe vereinfacht sich die Gl. (22) zu:

$$(I) \quad \mathfrak{X}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \mathfrak{X} = G_{ik} - (F_i v_k + F_k v_i).$$

### 3.

Aus der Hauptgleichung (I) erkennen wir, daß nicht jede metrische Belegung zugleich materieerzeugend ist. Haben wir eine Belegung vorliegen von folgender Form:

$$(24) \quad G_{ik} = V_i v_k + V_k v_i,$$

wobei  $V_i$  einen beliebigen Vektor bedeuten soll, so erkennen wir, aus (23), daß dann:

$$(25) \quad F_i = V_i$$

ist, und daher die rechte Seite der Gl. (I) identisch verschwindet. Andererseits folgt aus Gl. (I), daß diese Form zugleich die notwendige Bedingung ist, daß einer metrischen Belegung keine materielle Belegung entsprechen soll. Auch wird durch die

additive Hinzufügung der Form (24) zu einer gegebenen metrischen Belegung an der materiellen Belegung nichts geändert. Diese Tatsache, daß einer gewissen Art von Diskontinuität keine physikalische Bedeutung zukommt, läßt die Vermutung aufkommen, daß es sich dann nur um eine Unstetigkeit handeln kann, die auf mathematischem Wege hebbbar ist. Das finden wir in der Tat bestätigt, wie wir im folgenden zeigen wollen. Eine metrische Belegung von der Form (24) kann durch Koordinatentransformation erzeugt und auch wieder getilgt werden.

Offensichtlich kann es sich hierbei nicht um Transformationen handeln, die samt allen ihren Differentialquotienten durchwegs regulär sind. Eine solche Transformation kann keine Unstetigkeit erzeugen und damit auch keine metrische Belegung. Die Funktionen:

$$(26) \quad x_i = f_i(x'_1, \dots, x'_4),$$

welche die alten Koordinaten in die neuen, gestrichenen überführen, müssen auf der Grundfläche  $F$ , wo die Belegung entstehen soll, einen nichtanalytischen Charakter haben. Wir setzen aber die plausible allgemeine Forderung voraus, daß einem stetigen Variabilitätsbereich der Koordinaten  $x_i$  wieder ein stetiger Bereich der Koordinaten  $x'_i$  entsprechen soll. Die Funktionen (26) müssen also jedenfalls stetige Funktionen sein. Unstetigkeiten können erst in ihren Ableitungen auftreten und zwar kommt es nur auf ihre ersten und zweiten Ableitungen an, da die Transformation der  $g_{ik}$  und der  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}$  nur von diesen abhängig ist. Wir setzen also voraus, daß die Funktionen (26) außerhalb der Grenzfläche sowohl auf der einen, wie auf der anderen Seite der Fläche in der ganzen Umgebung stetig sind, samt allen ihren ersten und zweiten Differentialquotienten, und daß auf der Fläche selber die Stetigkeit der Funktionen auch noch bewahrt bleibt — etwaige Unstetigkeiten erst in den Ableitungen auftreten.

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die Untersuchung wieder im Koordinatensystem (1) ausführen, also die Gleichung der Grundfläche in der Form  $x_1 = 0$  voraussetzen. Weiterhin erkennen wir leicht, daß es immer möglich ist, eine überall im ganzen Gebiet reguläre — d. h. samt

allen ersten und zweiten Abteilungen stetige — Transformation zu finden, welche die Transformation auf der *einen* Seite der Fläche, z. B. auf der unteren —, wieder rückgängig macht. Da eine solche Transformation auf die Belegung ohne Einfluß ist, können wir somit voraussetzen, daß für die untere Seite der Fläche, also für  $x_1 < 0$ , die neuen Koordinaten mit den alten zusammenfallen:

$$(27a) \quad x_i = x'_i \quad (\text{für } x_1 < 0).$$

Für die Transformation *oberhalb* der Fläche, also für  $x_1 > 0$  wollen wir in bezug auf die unmittelbare Umgebung eine Reihenentwicklung der Funktionen (26) nach  $x'_1$  vornehmen. Um den stetigen Anschluß an (27a) in der Ebene  $x_1 = x'_1 = 0$  zu erreichen, müssen wir setzen:

$$(27b) \quad x_i = x'_i + \alpha_i x'_1 + \frac{\beta_i}{2} x'^2_1 + \dots \quad (\text{für } x_1 > 0),$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  irgendwelche Funktionen von  $x'_2, \dots, x'_4$  bedeuten sollen.

Nun haben wir für die Transformation der  $g_{ik}$  als Tensor-komponenten die bekannte allgemeine Regel:

$$(28) \quad g_{ik}' = g_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial x'_i} \frac{\partial x_s}{\partial x'_k}.$$

Unterhalb der Fläche bekommen wir natürlich:

$$(29a) \quad g_{ik}' = g_{ik}.$$

Oberhalb der Fläche ergibt das Einsetzen der Werte aus (27b), wenn wir zu  $x_1 = 0$  übergehen:

$$(29b) \quad \begin{cases} g_{ik}' = g_{ik}, & \text{wenn } i \neq 1, k \neq 1 \\ g_{i1}' = g_{i1} + g_{is} \alpha_s, & \text{wenn } i \neq 1 \\ g_{11}' = g_{11} + 2g_{1s} \alpha_s + g_{rs} \alpha_r \alpha_s. \end{cases}$$

Nun haben wir von Anfang an die durchgängige Stetigkeit des Maßtensors vorausgesetzt. Wir haben damit die Möglichkeit von sogen. „Doppelbelegungen“ (nach der Bezeichnung der Potentialtheorie) von vornherein ausgeschlossen. Jetzt sehen wir, daß Transformationen, die auf einer Fläche in ihren ersten Ableitungen unstetig werden, eine „scheinbare Doppelbelegung“ erzeugen würden. Denn in den 4 Größen  $g_{i1}$  entstehen Sprünge, wenn wir uns von der unteren Seite der Fläche auf die obere begeben. Um das zu vermeiden, müssen die 4 Produktsummen



$g_i, \alpha_i$  verschwinden, was wiederum nur möglich ist, wenn die 4 Funktionen:

$$(30) \quad \alpha_i = 0$$

sind, da die Determinante der Maßbestimmung nicht verschwinden kann. Das heißt, es kommen für uns a priori nur Transformationen in Frage, die auch noch in ihren ersten Ableitungen überall stetig sind.<sup>1)</sup> Eine metrische Belegung wird erst durch eine Unstetigkeit in den zweiten Differentialquotienten bedingt.

Um den Sprung in der Ableitung nach der Normale zu berechnen, haben wir nur die 10 Größen  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}$  auf beiden Seiten der Fläche zu bilden. Die Ableitungen nach den übrigen Koordinaten fallen alle in die Fläche selbst und sind demgemäß stetig. Differenzieren wir nun die Formel (28) nach  $x_i'$  unter Berücksichtigung von (30), so finden wir im transformierten Koordinatensystem für die Differenz der Ableitungen auf beiden Seiten:

$$(31) \quad \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i'} \right]_1 = g_{i1} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_k' \partial x_1'} + g_{k1} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_i' \partial x_1'},$$

wobei für  $x_i$  die Ausdrücke (27 b) einzusetzen sind, jedoch mit  $\alpha_i = 0$ . Wir überzeugen uns leicht, daß auf der Fläche  $x_1 = 0$  alle zweiten Ableitungen verschwinden, außer wenn zweimal nach  $x_1'$  differenziert wird. Das bedeutet aber, daß alle  $\left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i'} \right]_1$

1) Übrigens läßt sich hier unmittelbar auch die Frage beantworten, die Hr. Sen auf S. 384 seiner Arbeit aufwirft, welcher Art Unstetigkeiten im Maßtensor durch Koordinatentransformation entstehen oder aufgehoben werden können. Es bleiben alle  $g_{ik}$  für  $i \neq 1, k \neq 1$  stetig, und nur die 4 Größen  $g_{i1}$  erleiden einen Sprung. Genau so, wie nachfolgend im Text, können wir auch hier schließen, daß eine „scheinbare Doppelbelegung“, deren Tilgung durch Koordinatentransformation möglich ist, ebenfalls nur von der Form (24) sein kann. Eine Anwendung dieses Resultates auf ein statisches Gravitationsfeld ergibt ohne weitere Rechnung, daß der Koeffizient  $g_{44}$  — also die gewöhnlich als Quadrat der „Lichtgeschwindigkeit“ interpretierte Größe — durch Koordinatentransformation weder an sich, noch in ihren Ableitungen eine Unstetigkeit erleiden kann. Denn im Fall einer ruhenden Fläche ist  $v_4 = 0$ , es verschwindet also die Komponente (4,4) der Form (24) sowohl für die scheinbare Doppelbelegung, wie für die scheinbare einfache Belegung.

verschwinden, wenn weder  $i$  noch  $k$  den Wert 1 aufnehmen. Somit sind auch alle:

$$(32) \quad G_{ik} = 0, \quad \text{wenn } i \neq 1, k \neq 1.$$

Ein solcher Tensor ist aber tatsächlich in der Form:

$$(33) \quad G_{ik} = V_i v_k + V_k v_i$$

darstellbar, indem die rechte Seite für  $i, k \neq 1$  wegen

$$v_2 = \dots = v_4 = 0$$

verschwindet, während die übrigen 4 Gleichungen zur Bestimmung von  $V_i$  offenbleiben. Umgekehrt kann man aber auch bei beliebig gegebenem  $V_i$  die 4 Größen  $\beta_i$  in (27b) so vorschreiben, daß die Gl. (33) erfüllt sein soll. Wir erkennen aus diesen Darlegungen, daß in der Tat *diejenige und nur diejenige Form der metrischen Belegung keine Materie erzeugt, welche durch eine entsprechende Koordinatentransformation hervorgerufen und demgemäß auch wieder getilgt werden kann* (a. a. O. S. 451, Punkt 2).

#### 4.

Unter diesen Umständen werden wir eine metrische Belegung von der Form (24) mit Recht als „scheinbare Belegung“ bezeichnen dürfen und durch eine entsprechende Transformation rückgängig machen. Gehört aber eine Belegung nicht unter diesen Typus, so kann sich dennoch einer wahren Belegung noch eine scheinbare überlagern. Wir haben es aber in der Hand, zur gegebenen Belegung noch eine beliebige scheinbare hinzuzufügen, ohne am Materietensor, dem ja allein physikalische Bedeutung zukommt, etwas zu ändern. Wir benutzen diese Möglichkeit, um der scheinbare Belegungen nicht mehr auftreten können. Wir dürfen dazu eine vektorielle Bedingung wählen, da uns ja bei der additiven Hinzufügung einer Belegung von der Form (24) der Vektor  $V_i$  frei zur Verfügung steht. Unsere Hauptgleichung (I) zeigt unzweideutig den Weg, den wir dabei einzuschlagen haben. Die Beziehung zwischen metrischer und materieller Belegung wird besonders einfach, wenn der durch Gl. (23) definierte Vektor  $F_i$  verschwindet. Das bedeutet folgende Vorschrift für die metrische Belegung:

$$(II) \quad (G_{is} - \frac{1}{2} g_{is} G) v^s = 0.$$

Der Tensor der materiellen Belegung steht dann mit  $G_{ik}$  im folgenden einfachen Zusammenhang (a. a. O. S. 541, Punkt 3):

$$(Ia) \quad \mathcal{T}_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G.$$

Es besteht jetzt vollständige Analogie zu den Gravitationsgleichungen bei räumlicher Verteilung der Materie:

$$T_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R.$$

Die Rolle des Riemannschen Krümmungstensors übernimmt der Tensor der metrischen Belegung.

Die Überführung einer gegebenen metrischen Belegung in die „Normalform“, in der also die Gl. (II) erfüllt ist, erfordert nicht die tatsächliche Ausführung einer Koordinatentransformation, sondern nur die Bestimmung des Vektors  $V_i$  der additiv hinzuzufügenden scheinbaren Belegung von der Form (24). Das bedeutet aber nur die Lösung eines linearen Gleichungssystems, kann also immer mit Leichtigkeit vollzogen werden. Wir sehen auch, daß in der Normalform scheinbare Belegungen nicht auftreten können. Für die Form (24) würde nämlich die Bedingung der Normalität die Beziehung  $V_i = 0$  geben.

## 5.

Vergleichen wir Gl. (Ia) mit (II), so erkennen wir unmittelbar das Bestehen folgender Beziehung (die wir ebenso auch aus der Hauptgleichung (I) hätten ableiten können):

$$(III) \quad \mathcal{T}_i{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0.$$

*Der Tensor der flächenhaft verteilten Materie steht senkrecht zur Flächennormale.*

Die Verteilung der materiellen Belegung auf einer Fläche darf also nicht beliebig vorgeschrieben werden. Sie ist in jedem Flächenpunkte der „Orthogonalitätsbedingung“ (III) unterworfen. Aber auch abgesehen davon ist die Verteilung der Materie noch durch eine andere Bedingung eingeschränkt. Jede Materie muß ja dem „Impuls-Energie-Satz“ Folge leisten, in mathematischer Ausdrucksweise der „Divergenzbedingung“

$$(34) \quad \operatorname{div}_i T = (T_i{}^{\nu}{}_{,\nu}) = 0,$$

wenn die Materie räumlich verteilt ist. Es fragt sich jetzt, wie werden wir dieses Gesetz auf flächenhaft verteilte Materie zu übertragen haben.

Die Schwierigkeit, die sich hierbei einstellt, ist folgende. Die Werte des Materientensors sind ja nur auf einer Fläche angegeben, sie können also nicht als Funktion der räumlichen Koordinaten  $x_i$  aufgefaßt werden. Wir müßten die Gleichung der Fläche in Parameterform angeben, auch die Werte von  $T_{ik}$  als Funktion der Parameter, dann das Linienelement der Fläche bilden und die fragliche Gleichung innerhalb der Fläche (also für einen Raum von  $n - 1 = 3$  Dimensionen) ansetzen. Dieser Weg ist umständlich und wenig übersichtlich. Wir werden ein anderes Verfahren einschlagen, bei dem die allgemein invariante Form der Gleichungen in bezug auf alle räumlichen Koordinate erhalten bleibt und ein enger Anschluß an die räumliche Divergenzgleichung erzielt wird.

Wir denken uns die  $\mathfrak{T}_{ik}$ -Werte nicht nur auf der Fläche gegeben, sondern auf irgend einer willkürlichen Weise in den ganzen, die Fläche unmittelbar umgebenden Raum fortgesetzt, wobei wir nur auf die durchgängige Stetigkeit und Differenzierbarkeit der so entstehenden  $\mathfrak{T}_{ik}$ -Funktionen, die nunmehr in der Umgebung der Fläche Funktionen aller räumlichen Variablen sind, achten wollen. Jetzt können wir die Ableitungen

$\frac{\partial \mathfrak{T}_{ik}}{\partial x_i}$  bilden und auch den kovarianten Differentialquotienten

$(\mathfrak{T}_{ik})_i$ . Die Ableitung nach irgend einer räumlichen Richtung kann aber immer zusammengesetzt werden aus Ableitungen nach  $n - 1$  Richtungen in der Fläche selber und aus der Ableitung nach der Normale. Der letztere Anteil muß paralyisiert werden. Denn er kommt ja nur durch das Fortsetzen der  $\mathfrak{T}_{ik}$ -Werte in den Raum hinein zustande, was wir als mathematisches Hilfsmittel eingeführt haben, dem aber ein objektiver Sinn nicht zukommt. Ziehen wir in diesem Sinne aus der Ableitung  $\frac{\partial \mathfrak{T}_{ik}}{\partial x_i}$  den Anteil der Normale ab, — und das

ist:  $\frac{\partial \mathfrak{T}_{ik}}{\partial \nu} \nu_i$ , — oder bilden wir statt dem kovarianten Differentialquotienten  $(\mathfrak{T}_{ik})_i$  die Differenz:

$$(35) \quad (\mathfrak{T}_{ik})_i - \frac{\partial \mathfrak{T}_{ik}}{\partial \nu} \nu_i,$$

so resultiert ein Tensor, zu dessen Berechnung in einem beliebigen Koordinatensystem wohl die Fortsetzung der  $\mathfrak{T}_{ik}$ -Werte in den Raum hinein benötigt wird, welcher aber trotzdem

einzig und allein von den gegebenen Werten auf der Fläche selbst abhängig ist. Wir überzeugen uns leicht von dieser Behauptung, wenn wir uns wieder ins Koordinatensystem (1) begeben.

An Stelle der Gleichung  $(\mathfrak{I}_i^s)_s = 0$  werden wir also zu setzen haben:

$$(36) \quad (\mathfrak{I}_i^s)_s - \frac{\partial \mathfrak{I}_i^s}{\partial \nu} \nu_s = 0.$$

Wir wollen jedoch bei der Fortsetzung der  $\mathfrak{I}_{ik}$ -Werte in den Raum hinein noch eine Einschränkung machen. Der Tensor muß ja auf der Fläche so gegeben sein, daß er der Orthogonalitätsbedingung genügt:

$$(III) \quad \mathfrak{I}_i^s \nu_s = 0.$$

Wir nehmen an, daß diese Bedingung auch außerhalb der Fläche erhalten bleibt. Allerdings hat ja die Flächennormale  $\nu$  vorerst nur für die Fläche selbst einen Sinn. Betrachten wir aber außer der gegebenen Fläche  $F(x_1, \dots, x_4) = 0$ , die ganze Schar von Flächen,  $F(x_1, \dots, x_4) = \text{const.}$ , wobei die Konstante rechter Hand um 0 herum variere, so geht auch in der Umgebung der Grundfläche durch jeden Punkt eine Fläche hindurch und so wird auch die Flächennormale  $\nu$  in den Raum hinein fortgesetzt.

Differenzieren wir nun die Gleichung (III) nach  $\nu$ , so erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathfrak{I}_i^s}{\partial \nu} \nu_s = - \mathfrak{I}_i^s \frac{\partial \nu_s}{\partial \nu}$$

und dieses in Gl. (36) eingesetzt resultiert:

$$(37) \quad (\mathfrak{I}_i^s)_s + \mathfrak{I}_i^s \frac{\partial \nu_s}{\partial \nu} = 0.$$

Den zweiten Term können wir noch etwas umformen. Nach der Definition der Flächennormale haben wir:

$$(38) \quad \nu_i = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

wobei der Faktor  $1/\Gamma$  durch die Forderung  $\nu, \nu^* = 1$  bestimmt wird (a. a. O., S. 540):

$$(39) \quad \Gamma = \sqrt{\frac{\partial F}{\partial x_r} \frac{\partial F}{\partial x_s} g^{rs}}.$$

Die Differentiation von (38) nach  $\nu$  ergibt:

$$(40) \quad \frac{\partial \nu_i}{\partial \nu} = -\frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \nu}.$$

Durch Multiplikation der Gl. (38) mit  $\nu^i$  haben wir aber:

$$(41) \quad \Gamma = \frac{\partial F}{\partial x_i} \nu^i = \frac{\partial F}{\partial \nu}$$

und darum können wir die Gl. (40) auch noch in folgender Form schreiben:

$$(42) \quad \frac{\partial \nu_i}{\partial \nu} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \nu_i + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}.$$

Beim Einsetzen dieses Wertes in (37) fällt der erste Term wieder infolge der Orthogonalitätsbedingung weg und es bleibt:

$$(\mathfrak{T}_i^i)_s + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_s} \mathfrak{T}_i^s = 0.$$

Die linke Seite läßt sich aber auch so schreiben:

$$(43) \quad \frac{1}{\Gamma} (\Gamma \mathfrak{T}_i^i)_s = \frac{1}{\Gamma} \operatorname{div}_i \Gamma \mathfrak{T}.$$

Die gesuchte Divergenzbedingung nimmt also folgende einfache Form an (a. a. O., S. 541, Punkt 4):

$$(IV) \quad \operatorname{div}_i \Gamma \mathfrak{T} = 0.$$

Die Divergenzgleichung für flächenhaft verteilte Materie unterscheidet sich also von der räumlichen nur darin, daß der Materietensor  $\mathfrak{T}_{ik}$  mit dem Skalar  $\Gamma$  multipliziert in die Gleichung eingesetzt werden muß.

Dieses Ergebnis kann physikalisch einfach interpretiert werden. Wir können uns ja die flächenhafte Belegung als Grenzfall einer volumenhaft verteilten Materie vorstellen, welche in einer unendlich dünnen Schale zwischen den Flächen

$$F(x_1, \dots, x_4) = 0 \quad \text{und} \quad F(x_1, \dots, x_4) = \varepsilon$$

ihren Sitz hat. Für diese Materie gilt aber die gewöhnliche Divergenzgleichung:

$$\operatorname{div}_i T = 0.$$

Um die Flächendichte zu bekommen, müssen wir nun die räumliche Dichte mit dem unendlich kleinen Abstand zwischen den beiden Flächen multiplizieren. Derselbe ist umgekehrt proportional zu  $\Gamma$ , und so können wir — abgesehen von einem unendlich kleinen Proportionalitätsfaktor — setzen:

$$(44) \quad \mathfrak{T}_{ik} = \frac{1}{F} T_{ik}$$

oder:

$$T_{ik} = F \mathfrak{T}_{ik},$$

was in die vorangehende Gleichung eingesetzt in der Tat die Gl. (IV) ergibt.

Wir haben hier nur heuristisch den Impulssatz für flächenhaft verteilte Materie unter Anlehnung an die räumliche Form abgeleitet, jedoch keinen exakten Beweis gegeben. Derselbe erfordert etwas weitergehende Rechnungen und es soll darum hier nur der Weg zu seiner Erlangung angegeben werden. Außerhalb der Fläche  $F$  gelten die Gravitationsgleichungen für den leeren Raum, also:

$$R_{ik} = 0.$$

Wir schreiben nun folgende Vektorgleichung an:

$$(R_{i,} - \frac{1}{2} g_{i,} R) v^i = 0,$$

und bilden die Differenz für die obere und untere Seite der Fläche  $F$ :

$$(45) \quad [R_{i,} - \frac{1}{2} g_{i,} R]_1^2 v^i = 0.$$

Es treten hierbei die Sprünge in den ersten und zweiten Ableitungen des Maßtensors nach den Koordinaten auf:

$$\left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} \right]_1^2 \quad \text{und} \quad \left[ \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_i \partial x_m} \right]_1^2.$$

Doch läßt sich an Hand unserer Hauptgleichung (I) alles auf den Materietensor  $\mathfrak{T}_{ik}$  und seine Ableitungen nach Richtungen, die alle in die Fläche selber fallen, zurückführen, und es resultiert eine Vektorgleichung, die mit unserer Gl. (IV) nach entsprechender Umformung zusammenfällt. Bei dieser Ableitung des Gesetzes ergibt sich noch folgendes. Bilden wir den kovarianten Differentialquotienten eines Tensors, so treten ja außer den Differentialquotienten nach den Koordinaten noch gewisse Ergänzungsglieder auf, in denen die Christoffelschen Klammerausdrücke eine Rolle spielen. Was die Divergenz anbelangt, so haben wir im Fall eines symmetrischen Tensors:

$$\text{div}_i T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T_i^i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} T^{rs}.$$



Da nun die  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}$  an der Oberfläche einen Sprung erleiden, bekommen wir zwei verschiedene Ausdrücke, je nachdem ob wir die Divergenz auf der einen oder anderen Seite der Fläche bilden.

Die Beweisführung zeigt, daß wir das *arithmetische Mittel* aus den beiden Werten in die Formel einzusetzen haben, also

für  $\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i}$  schreiben müssen:

$$(46) \quad \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right]_1 + \left[ \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right]_2 \right).$$

Auch hier erkennen wir, daß die Hinzufügung einer scheinbaren Belegung ohne Einfluß bleibt. Es würde dadurch ein Zusatzglied entstehen von folgender Beschaffenheit:

$$\frac{1}{2} (V_r v_s + V_s v_r) T^{rs},$$

was aber wegen der Orthogonalitätsbedingung verschwindet.

## 6.

Wir haben uns bei der Ableitung des Impulssatzes an den räumlichen Impulssatz anlehnen können und die Flächenbelegung somit aufgefaßt als Grenzfall einer räumlichen Materieverteilung. Da aber der Materietensor der Flächenbelegung auch noch einer anderen Bedingung unterworfen ist, nämlich der Orthogonalitätsbedingung (III), müssen wir vermuten, daß auch bei räumlicher Materieverteilung eine Bedingung solcher Art existieren muß. In der Tat ist das der Fall an jeder Grenzfläche, wo Materie unmittelbar an den leeren Raum stößt.

Es braucht ja die Materie nicht kontinuierlich ins Vakuum überzugehen. Denken wir uns z. B. eine inkompressible Flüssigkeitskugel im Raum, so ist die Dichte der Materie überall im Innern der Kugel konstant und fällt dann am Rande unmittelbar auf Null. Der Tensor der Materie braucht also keine kontinuierliche Funktion der Raumkoordinaten zu sein. Nehmen wir nun an, daß nirgends Flächenbelegungen auftreten sollen, daß also der Maßtensor samt seinen ersten Ableitungen überall stetig sei (scheinbare Belegungen können ja durch Koordinatentransformation gehoben werden). Betrachten wir jetzt die Feldgleichungen der Gravitation:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik}.$$

Wenn die Funktion rechter Hand an der Grenzfläche unstetig wird, so müssen in den *zweiten Ableitungen* des Maßtensors Sprünge entstehen. Und zwar kann es sich nur um die zweite Ableitung nach der Normale handeln; Ableitungen nach einer Richtung, welche in die Fläche selber fällt, können nicht unstetig werden. Betrachten wir nun folgenden Vektor:

$$(R_i, -\frac{1}{2}g_i, R)v^s.$$

Eine im Koordinatensystem (1) ausgeführte Rechnung zeigt, daß in diesem Ausdruck *keine zweite Ableitung nach der Normale auftritt* (nämlich kein zweiter Differentialquotient nach  $x_i$ ), diese Größe muß also auch in der Grenzfläche stetig bleiben. Nach den Feldgleichungen ist das aber nichts anderes, wie  $T_{i,s}v^s$ . Die Verteilung der Materie muß so angegeben sein, daß dieser Vektor nirgends einen Sprung erleidet, er muß also in der Grenzfläche kontinuierlich ins Vakuum übergehen. Das bedeutet aber, daß er in der Grenzschicht verschwinden muß:

$$(47) \quad T_{i,s}v^s = 0.$$

An der freien Grenze zwischen Materie und Äther steht der Tensor der Materie immer senkrecht auf die Flächennormale.<sup>1)</sup>

Die Orthogonalitätsbedingung (III) hat also in der Tat auch für räumlich verteilte Materie seine Bedeutung, nur kommt er hier nicht für alle Punkte in Frage, sondern nur als Grenzbedingung auf der Grenzfläche zwischen Materie und Vakuum. Wir wollen eine Anwendung dieser Grenzbedingung geben zur Ableitung der bekannten Tatsache, daß auf der Oberfläche einer inkompressiblen Flüssigkeit der Druck verschwindet. Als Materietensor einer inkompressiblen Flüssigkeit haben wir bekanntlich folgenden Ausdruck zu nehmen:

$$T^{ik} = (\mu + p)\dot{x}_i\dot{x}_k - pg^{ik}.$$

Es bedeutet hierbei  $\mu$  die Dichte,  $p$  den Druck der Flüssigkeit. Bilden wir jetzt den Ausdruck  $T_{i,s}v^s$  auf der Oberfläche, so fällt das erste Glied weg, weil die Vierergeschwindigkeit immer in die Begrenzungsfläche hineinfällt und somit auf die Normale senkrecht steht. Es bleibt also:

$$T_{i,s}v^s = -pv_i,$$

1) Ich habe diese Grenzbedingung in anderem Zusammenhang bereits veröffentlicht (vgl. Zeitschr. f. Phys. 14. S. 213. 1923. Anm. 1).

und dieser Ausdruck kann nur verschwinden, wenn  $p = 0$  ist. Das Verschwinden des Druckes an der freien Oberfläche einer Flüssigkeit ist also eine Folge der Grenzbedingung (47).

7.

Als Anwendung unserer allgemeinen Gleichungen wollen wir den auch von Hrn. Sen in Betracht gezogenen Fall einer ruhenden Kugel erörtern, auf deren Oberfläche sich Materie in homogener Verteilung befindet. Im Inneren der Kugel herrscht die euklidische Geometrie, außerhalb das Schwarzschildsche Linienelement. In Polarkoordinaten haben wir also innerhalb der Kugel:

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - c^2 dt^2,$$

außerhalb aber:

$$(48a) \quad ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2.$$

An der Grenzfläche, wo die Materie ihren Sitz hat, also auf einer Kugeloberfläche, deren Radius  $r = a$  sei, müssen die beiden Linienelemente stetig ineinander übergehen. Wir haben also  $c^2 = 1 - \frac{a}{r}$  zu setzen. Trotzdem bleibt noch eine Unstetigkeit in  $g_{11}$  übrig. Es handelt sich jedoch dabei nur um eine „scheinbare Doppelbelegung“, wie wir das aus der Anmerkung auf S. 528 erkennen können. In der Tat, transformieren wir im Innenraum den Radiusvektor  $r$ , indem wir setzen:

$$r = f(r'),$$

so erhalten wir:

$$(48b) \quad ds^2 = f'^2(r') dr'^2 + f'^2(r')(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{a}{a}\right) dt^2.$$

Und wir können jetzt die Vorschrift machen, daß sei:

$$(49) \quad f(a) = a, \quad f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{a}}}.$$

Dadurch haben wir die durchgängige Stetigkeit des Maßtensors erreicht. Nun wollen wir zur Berechnung des Materietensors auf der Oberfläche der Kugel übergehen, und zwar wählen wir zweckmäßigerweise die gemischten Komponenten.

Schon aus allgemeinen Symmetriegründen folgt, daß der räumliche Teil des Materietensors nur folgende Form haben kann:

$$(50) \quad \mathfrak{T}_i^k = -p \eta_i^k + q v_i v^k, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

( $\eta_i^k$  der gemischte Einheitstensor). Weiterhin ist:

$$(51) \quad \mathfrak{T}_i^i = \mathfrak{T}_4^i = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

und wir setzen:

$$(52) \quad \mathfrak{T}_4^4 = \mu.$$

Wenden wir die Orthogonalitätsbedingung (III) auf die Form (50) an, so finden wir  $q = p$ , also:

$$(53) \quad \mathfrak{T}_i^k = -p(\eta_i^k - v_i v^k).$$

*Es bedeutet  $p$  einen in der Oberfläche wirkenden allseitigen Druck der Materie, während  $\mu$  die Massendichte ist.*

Wir wollen diese Größen auf Grund unserer Hauptgleichung (I) bzw. (Ia) berechnen, benötigen also vorerst den Tensor der metrischen Belegung. Seine Berechnung ist in unserem Fall sehr einfach. Die Normale fällt ja in die Richtung des Radius und wir haben nur den Differentialquotienten der  $g_{ik}$  nach  $r$  zu bilden und mit  $v^1$  zu multiplizieren. Denn alle übrigen  $v_i$  sind  $= 0$ , während  $v^1$  den Wert hat:

$$v^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} = \pm \sqrt{1 - \frac{a}{a}}.$$

Nehmen wir dann das arithmetische Mittel aus den beiden Ableitungen, gebildet für die eine und für die andere Seite der Fläche, so haben wir der Definition nach den Tensor  $G_{11}$  erhalten.

Wegen der Orthogonalität des Linienelements sind nur die Komponenten längs der Diagonale von 0 verschieden. Was  $G_1^1$  anbelangt, so brauchen wir seinen Wert gar nicht berechnen, denn er kann ja durch eine scheinbare Belegung beliebig verändert werden. In der Tat kommt es dabei auf die Größe  $\ddot{f}(a)$  an, für die wir keine Vorschrift gemacht haben. Wir normieren aber den Wert von  $G_1^1$ , indem wir die Belegung in die Normalform bringen. Das bedeutet in unserem Falle folgende Beziehung:

$$(54) \quad G_1^1 - \frac{1}{2} G = 0,$$

also:

$$(55) \quad G_1^1 = G_2^2 + G_3^3 + G_4^4.$$

Wir kommen jetzt zur Berechnung von  $G_2^2$ . Die Ableitung von  $g_{22}$  nach der Normale ist auf der Außenseite:

$$2a v^1 = 2a \sqrt{1 - \frac{a}{a}},$$

auf der Innenseite:

$$2a f'(a) v^1 = -2a,$$

das arithmetische Mittel also:

$$G_{22} = a \left( \sqrt{1 - \frac{a}{a}} - 1 \right),$$

und hieraus:

$$(56) \quad G_2^2 = \frac{1}{a} \left( \sqrt{1 - \frac{a}{a}} - 1 \right).$$

Ebenso groß ist auch  $G_3^3$ . Für  $G_4^4$  finden wir ganz analog:

$$(57) \quad G_4^4 = \frac{1}{2} \frac{a}{a^2} \sqrt{1 - \frac{a}{a}} \frac{1}{1 - \frac{a}{a}} = \frac{a}{2a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{a}}}.$$

Damit haben wir aber nach Gl. (55) auch  $G_1^1$  und somit auch den Skalar  $G$  ermittelt. Das Einsetzen der Werte ergibt:

$$(58) \quad G = \frac{4}{a} \left( \sqrt{1 - \frac{a}{a}} - 1 \right) + \frac{1}{a} \frac{\frac{a}{a}}{\sqrt{1 - \frac{a}{a}}}.$$

Nun können wir mit Hilfe der Gl. (Ia) unmittelbar zum Materietensor übergehen, und zwar haben wir für die gemischten Komponenten der Diagonale zu setzen:

$$\mathfrak{T}_i^i = G_i^i - \frac{1}{2} G.$$

Das liefert uns für die Flächendichte  $\mathfrak{T}_4^4 = \mu$  folgenden Wert:

$$(59) \quad \mu = \frac{2}{a} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{a}{a}} \right).$$

Während für den in der Oberfläche wirksamen Druck folgt:

$$(60) \quad p = \frac{1}{a} \left( \sqrt{1 - \frac{a}{a}} - 1 + \frac{a}{2a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{a}}} \right).$$

Für schwache Felder, wo  $\alpha/a$  klein ist, haben wir angenähert

$$\mu = \frac{\alpha}{a^2}$$

und

$$p = \frac{\alpha^2}{8a^3}.$$

In einem unendlich schwachen Gravitationsfeld wird also der Druck in der Oberfläche von der zweiten Ordnung unendlich klein — wie das aus der Theorie der unendlich schwachen Felder a priori vorauszusehen ist.

Es scheint nicht gerechtfertigt, den Skalar  $\mathfrak{I}$  einfach als „Flächendichte“ anzusprechen. Die Flächendichte ist immer  $\mathfrak{I}_4$ , während sich die Invariante  $\mathfrak{I}$  aus Dichte und Druck folgendermaßen zusammensetzt:

$$(61) \quad \mathfrak{I} = \mu - 2p.$$

Die Flächendichte verschwindet nur bei  $\alpha = 0$ , also, wenn überhaupt der ganze Materietensor verschwindet. Das Verschwinden des Skalars  $\mathfrak{I}$  bei

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{8}{9} \text{ } ^1)$$

und sein Zeichenwechsel für noch größere  $\alpha/a$ -Werte bedeutet nur, daß der Druck stärker anwächst als die Massendichte und den Einfluß der letzteren auf  $\mathfrak{I}$  schließlich überholt.

Freiburg i. B., Physikal. Institut, den 12. März 1924.

1) Vgl. N. Sen, a. a. O., S. 394.

(Eingegangen 18. März 1924.)

3. *U*  
un  
er

1  
suche  
isotro  
Rotat  
gewie  
aufge  
dynar  
als ei  
werde  
mistis  
logisch  
unter  
kurzer  
jedoch  
daß si  
zu erl  
I  
aufge  
Krista  
wirku  
Berug  
sche I  
den F  
toren

1  
Nr. 3.  
00. S.  
2  
Ann

3. ***Über eine von einem asymmetrisch-tetraedrischen  
und von einem spiralförmigen Molekülmodell  
erzeugte Drehung der Polarisationssebene der  
elektromagnetischen Wellen;  
von Karl F. Lindman.***

**I. Einleitung.**

1. In einigen früheren Veröffentlichungen<sup>1)</sup> habe ich Versuche beschrieben, wodurch eine durch ein dreidimensionales isotropes System von schraubenförmigen Resonatoren erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen nachgewiesen worden ist, die mit den Forderungen der von Drude aufgestellten und von Natanson weiter entwickelten elektrodynamischen Theorie der Photogyration übereinstimmt und als eine experimentelle Bestätigung dieser Theorie aufgefaßt werden kann. Die diesen Versuchen zugrunde gelegte atomistische Deutung, welche die Drudesche, an sich phänomenologische Theorie erlaubt und nach der die Elektronen sich unter Einwirkung der asymmetrischen Molekularstruktur in kurzen, gleichsinnig gewundenen Schraubenlinien bewegen, ist jedoch mehreren Forschern so wenig annehmbar vorgekommen, daß sie die betreffende optische Erscheinung auf andere Weise zu erklären versucht haben.

Ich erwähne hier zuerst die von Oseen<sup>2)</sup> im Jahre 1915 aufgestellte Theorie für die Drehung der Polarisationssebene in Kristallen und Flüssigkeiten, welche Theorie von der Wechselwirkung zwischen elektrischen Resonatoren ausgeht und mit Bezug auf die aktiven Flüssigkeiten die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik auf ein Molekülmodell anwendet, das an den Ecken eines irregulären Tetraeders vier isotrope Resonatoren derselben Art trägt, und dem einfachsten stereochemischen

1) Karl F. Lindman, Öfvers. af. Finska Vet. Soc. Förh. 57. A. Nr. 3. 1914 und 64. A. Nr. 5. 1922; Ann. d. Phys. 63. S. 621–644. 1920; 66. S. 270–284. 1922.

2) C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 48. S. 1–56. 1915.



Bilde der Moleküle einer optisch aktiven isotropen Substanz entspricht. Oseen findet, daß sich der Einfluß der Wechselwirkung zwischen den Resonatoren in demselben Molekül auf die Fortpflanzung des Lichtes darin äußert, daß sich in jeder Richtung zwei zirkularpolarisierte Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen können, d. h. in einer Drehung der Polarisationssebene, wobei die Drehung wesentlich *nur* von der geometrischen Asymmetrie der Moleküle bedingt wird.

In naher Verwandtschaft mit dieser Theorie steht die Bornsche Theorie<sup>1)</sup> von demselben Jahre, welche auch die natürliche optische Aktivität von Flüssigkeiten und Gasen mit Hilfe eines aktiven Molekülmodells zu erklären versucht, das vier asymmetrisch gebundene Elektronen an den Ecken eines Tetraeders enthält. Zur Erklärung der Aktivität der „asymmetrischen“ Kohlenstoffverbindungen genügt nach Born „weder die Annahme asymmetrischer Lage der schwingungsfähigen Partikeln an den Ecken des tetraederförmigen Kohlenstoffatoms, noch die Voraussetzung, daß jedes Partikel an seine Gleichgewichtslage mit anderen Kräften gebunden ist. Vielmehr muß notwendigerweise eine wechselseitige Beeinflussung der Partikeln vorhanden sein.“

Die Frage ist, wie auch Born hervorhebt, von Bedeutung besonders für die Chemiker, welche zu einer anschaulichen Erklärung des optischen Verhaltens der asymmetrischen Kohlenstoffverbindungen gelangen wollen und sich die Moleküle der erwähnten Substanzen unter dem Bilde eines (nach neueren stereochemischen Auffassungen als irregulär<sup>2)</sup> gedachten) Tetraeders vorstellen, an dessen vier Ecken *verschiedene* Atome oder Atomgruppen sitzen. Ein derartiges Molekül ist jedoch, wie Born hervorhebt, mechanisch wesentlich verwickelter als das von ihm untersuchte, „denn die vier Atomgruppen an den Ecken des Tetraeders schwingen nicht selbst unter der Wirkung des Lichtes, sondern tragen schwingungsfähige Elektronen, die auf die Lichtwelle ansprechen“. Nach einer von Prof. Oseen bei der zweiten nordischen Physikerversammlung in Uppsala (im August 1922) anlässlich eines von mir daselbst gehaltenen Vortrages gemachten Mitteilung, hat Prof. Born jedoch die Möglichkeit bezweifelt, daß ein von vier an den Ecken eines

1) M. Born, Physikal. Zeitschr. 16, S. 251–258. 1915.

2) Vgl. Oseen, a. a. O., S. 55.

irregulären Tetraeders geordneten isotropen Resonatoren bestehendes Molekül (das Oseensche Molekülmodell) optisch aktiv sei, indem er, im Gegensatz zu Oseen, durch eine mathematische Untersuchung eines solchen Molekülmodelles zu einem negativen Ergebnis gelangt wäre.

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß auch Stark<sup>1)</sup> die optische Aktivität von Kohlenstoffverbindungen durch die Annahme zu erklären versucht hat, daß die aktiven Moleküle vier im Raume asymmetrisch geordnete Resonatoren enthalten, von deren gegenseitigen Wechselwirkungen jedoch abgesehen wird, wogegen diese Resonatoren als äolotrop angenommen werden. Oseen (a. a. O.) findet indessen (wie auch Born), daß diese Annahmen nicht genügen, um zu einer mit den chemischen Tatsachen vereinbaren Erklärung der natürlichen Drehung zu kommen.

2. Wie aus dieser Übersicht hervorgeht, stimmen die neueren theoretischen Untersuchungen über die optische Aktivität isotroper Substanzen miteinander darin überein, daß man die Ursache dieser Erscheinung in einem asymmetrisch-tetraedrischen Bau der aktiven Moleküle sucht, wobei angenommen wird, daß sich schwingungsfähige Partikeln an den Ecken des Tetraeders befinden. In Betreff der Beschaffenheit und der Funktion dieser Partikeln scheinen jedoch die Meinungen auseinander zu gehen.

Von speziellem Interesse ist die Frage, ob das Oseensche Molekülmodell wirklich eine Drehung der Polarisationssebene zu erzeugen imstande ist oder nicht. Eine experimentelle Prüfung dieser Frage ist denkbar nur mit Hilfe der Hertzischen Wellen, die wegen ihrer Größe eine direkte Untersuchung der Wirkung eines artifiziellen Molekülmodelles dieser Art eventuell erlauben. Gegen die Möglichkeit, auf diesem Wege zu einem positiven Ergebnis zu gelangen, erheben sich jedoch von vornherein mehrere Bedenklichkeiten. Eine Anwendung von Raumgittern, die, wie bei meinen oben erwähnten Versuchen mit schraubenförmigen Resonatoren der Fall war, aus einer sehr großen Anzahl Molekülmodelle bestehen würden, kann nicht ohne sehr umfassende Anordnungen in Frage kommen bei Versuchen mit tetraedrisch gebauten Modellen von verhältnismäßig großen Dimensionen. Daß ein

1) J. Stark, Prinzipien der Atomdynamik 3. S. 262ff. 1915.

einziges oder einige wenige solche aus Resonatoren zusammengesetzte Molekülmodelle eine meßbare Drehung zu erzeugen vermöchten, scheint andererseits recht zweifelhaft, obwohl nicht ganz aussichtslos.<sup>1)</sup>

Im Kapitel II dieser Arbeit wird über Versuche berichtet, durch welche es dem Verf. gelungen ist, eine Drehung der Polarisationssebene der elektromagnetischen Wellen nachzuweisen, welche durch ein aus vier isotropen Resonatoren (Kupferkugeln) bestehendes asymmetrisch-tetraedrisches Molekülmodell erzeugt worden ist. Falls nicht schon der erste Versuch, den ich zufälligerweise in dieser Richtung — mit einer Versuchsanordnung, die sich später als irreführend zeigte — vornahm, mich auf ein positives Ergebnis hätte hoffen lassen, so hätte ich mich kaum auf die recht delikaten Messungen eingelassen, die jetzt zu einer bejahenden Antwort auf die oben aufgestellte Frage geführt haben, ob ein Molekülmodell der soeben erwähnten Art eine merkbare Drehung zu erzeugen vermag. Außer dem, daß die Versuche mehrere der von Oseen theoretisch gezogenen Schlußfolgerungen bestätigt haben, sind durch sie auch einige in seiner Theorie bisher nicht (wenigstens nicht ausdrücklich) behandelte Fragen untersucht worden, z. B. die Anomalie, welche die Drehung für Schwingungsfrequenzen in der Nähe der Eigenfrequenz der Resonatoren zeigt, sowie auch die Abhängigkeit der Drehung von der Orientierung des Molekülmodells im Verhältnis zu der Fortpflanzungsrichtung und der Schwingungsebene der Wellen.

3. In seiner oben zitierten Arbeit hat Oseen auch das Drehungsvermögen der aktiven Kristalle und speziell das des Quarzes durch die Annahme zu erklären versucht, daß die benachbarten Moleküle (bzw. Atome), die er sich als spiralförmig angeordnet denkt (ohne daß er jedoch irgendein detailliertes Bild der Struktur aufstellt), eine Wechselwirkung aufeinander ausüben, die mit derjenigen analog ist, die zwischen elektromagnetischen Resonatoren stattfindet. Nach der von den Herren Bragg<sup>2)</sup> angestellten Röntgenstrahlenanalyse des Quarzes bilden drei Moleküle  $\text{SiO}_2$  zusammen ein optisch-

1) Vgl. die Einleitung der in 4. (S. 546) erwähnten Abb. des Verfassers (S. 8).

2) W. H. u. W. L. Bragg, X-rays and Crystal Structure S. 160 bis 167. 1918.

akti  
gehe  
trig  
je  
wed  
der  
kan  
dies  
der  
Lag  
Die  
fass  
geoz  
rech  
und

gege  
han  
auch  
„tot  
nach  
Sam  
wir  
die  
stän  
esse  
Bra  
leich  
eben  
welc  
häng  
läng

ein  
hat  
im J  
dyna  
1909

185,

aktives Strukturelement<sup>1)</sup>, bei dem die neun zu dem Elemente gehörigen Atome um eine zu der optischen Achse parallele trigonale Strukturachse spiralförmig angeordnet sind, wobei, je nach der Windungsrichtung der Spirale, das Element entweder rechts- oder linksdrehend ist für Lichtwellen, die sich in der Richtung der optischen Achse fortpflanzen. Beckenkamp<sup>2)</sup> hat später durch kristallographische Betrachtungen dieses Strukturmodell des Quarzes näher präzisiert bezüglich der Abstände der Kieselatome von der trigonalen Achse und der Lage der Sauerstoffatome im Verhältnis zu der der Kieselatome. Die Atome des Strukturelementes sind auch nach seiner Auffassung annähernd (aber nicht exakt) in einer Spirale angeordnet und zwar bei dem linksdrehenden Quarze in einer rechtsgewundenen (einem Korkzieher entsprechenden) Spirale und bei dem rechtsdrehenden Quarze in einer linksgewundenen.

In einer neulich veröffentlichten Übersicht über unsere gegenwärtigen Kenntnisse von der Struktur der Kristalle behauptet Wyckoff<sup>2)</sup> jedoch, daß sowohl das Braggsche wie auch das Beckenkampsche Strukturmodell des Quarzes auf „total inadequate“ Schlußfolgerungen gegründet sei, weshalb nach seiner Ansicht „viel Arbeit noch übrig bleibt, sowohl in Sammlung von Daten wie auch in ihrer Interpretierung, ehe wir eine wirkliche Anweisung erhalten von der Art, auf welche die Atome beim Quarz angeordnet sind“. Unter solchen Umständen und auch unabhängig davon schien es mir von Interesse zu untersuchen, ob ein Strukturmodell von der von Hrn. Bragg angegebenen Form, das sich aus neun Kupferkugeln leicht aufbauen ließ, eine merkbare Drehung der Polarisationssebene der elektromagnetischen Wellen erzeugen würde, in welchem Falle auch eine experimentelle Feststellung der Abhängigkeit der Drehung von der Spiralform und der Wellenlänge möglich wäre.

1) Die Auffassung, daß beim Quarz drei Moleküle  $\text{SiO}_2$  zusammen ein „Kristallmolekül“ mit all den Eigenschaften ternärer Systeme bilden, hat auch Lord Kelvin in seiner Robert Boyle-Vorlesung in Oxford im Jahre 1893 ausgesprochen (vgl. Lord Kelvin, Vorl. über Molekulardynamik und die Theorie des Lichtes, deutsch von B. Weinstein, S. 536. 1900).

2) Ralph W. G. Wyckoff, Journal of the Franklin Institute, 195. S. 208. 1923.

Im Kapitel III werden Versuche beschrieben, die ich in dieser Richtung und zwar mit positiven Ergebnissen ausgeführt habe.

4. Mit Ausnahme von einigen Zusätzen ist der vorliegende Aufsatz ein Auszug aus einer in schwedischer Sprache abgefaßten, in *Acta Academiae Aboensis, Mathem. et phys.* (III) im Dezember 1923 veröffentlichten Abhandlung des Verfassers.

## II. Versuche mit tetraedrischen Molekülmodellen.

1. Die Apparate, mit welchen die elektromagnetischen Wellen erzeugt und untersucht wurden, waren dieselben, deren ich mich früher bei den auf S. 541 erwähnten Versuchen bedient hatte. Bei der letzten dieser Untersuchungen war die Versuchsanordnung die in Fig. 4 meines letzten dieses Thema behandelnden Aufsatzes<sup>1)</sup> angegebene, auf welche Figur im folgenden oft verwiesen werden muß.

Mit Ausnahme einer nötig befundenen Änderung der Lage des drehenden Resonatorensystems (vgl. unten) war bei der im folgenden beschriebenen Untersuchung die Versuchsanordnung fast ganz dieselbe wie die zuletzt erwähnte. Die bei den Intensitätsmessungen erreichte Genauigkeit ist in meinem oben erwähnten ausführlicheren Aufsätze eingehend erörtert worden. Das Beobachtungsmaterial ist auch daselbst größtenteils wiedergegeben. Wegen der Kleinheit der Galvanometerausschläge und der zu beobachtenden Drehungen der Polarisationsebene standen die Messungen manchmal fast an der Grenze des mit meinen jetzigen experimentellen Hilfsmitteln Erreichbaren. Trotz Anwendung der Juliusschen Aufhängevorrichtung waren die von Erschütterungen herrührenden Störungen der Galvanometer so groß, daß alle definitiven Messungen nachts ausgeführt werden mußten.

2. Als ich die letzten ergänzenden Versuche über die durch ein aktives Raumgitter erzeugte Rotationspolarisation im Mai 1922 abgeschlossen hatte, machte ich gelegentlich einen Versuch mit einem Molekülmodell, das dem oben erwähnten, von Oseen theoretisch untersuchten entsprach. Es bestand aus vier gleichen kupfernen Hohlkugeln, also aus vier gleichen *isotropen* Resonatoren, die sich an je einer Ecke eines irregulären Tetraeders befanden. Die Kupferkugeln, deren Radius

1) Karl F. Lindman, *Ann. d. Phys.* **69**, S. 270—284, 1922.

= 3,5 cm war, wurden in Baumwolle in derselben zylindrischen Pappschachtel eingebettet, wo sich das aus spiralförmigen Resonatoren bestehende Rauggitter vorher befunden hatte. Die Pappschachtel mit dem Molekülmodell nahm dabei den Platz des Resonatorensystems *M* ein (vgl. die oben erwähnte Figur).

Schon vor mehreren Jahren hatte ich gewisse Versuche mit kugelförmigen Resonatoren von der Größe der genannten Kugeln ausgeführt und dabei gefunden, daß sie eine, obwohl etwas schwach ausgeprägte Eigenperiode hatten, die in Übereinstimmung mit einer von J. J. Thomson theoretisch aufgestellten Formel<sup>1)</sup> einer halben Eigenwellenlänge  $\frac{1}{2} \lambda_0 = 12,7$  cm entsprach. Um überhaupt eine eventuelle merkbare Wirkung zu erhalten, schien es geraten, zuerst Wellen zu benutzen, deren halbe Länge von dieser Größe oder vielmehr ein wenig kleiner war.<sup>2)</sup> Ich benutzte deshalb zuerst Wellen, deren halbe Länge  $\frac{1}{2} \lambda = 9$  cm oder genauer = 8,8 cm war (die ganze Wellenlänge, 17,6 cm, war von derselben Größenordnung wie die Dimensionen des Molekülmodells, wobei die Abstände zwischen den benachbarten Resonatoren wenigstens *etwas* kleiner als die Wellenlänge waren).<sup>3)</sup> Durch allmähliche Drehung des Empfängers (*R*) erhielt ich eine symmetrische Intensitätskurve, deren höchster Punkt eine Lage einnahm, die eine Drehung der Polarisationssebene um etwa 7° nach links (für ein gegen die Fortpflanzungsrichtung der Wellen blickendes Auge) anzeigte. Nachdem die Pappschachtel mit dem Molekülmodell 180° um die geometrische Achse der Schachtel

1) Nach J. F. Thomson (Recent Researches in Electr. and Magn. S. 370, 1893) entspricht der einfachsten axial-symmetrischen ersten Eigenschwingung einer sehr gut leitenden Kugel eine Wellenlänge in Luft

$$\lambda_0 = \frac{4\pi a}{\sqrt{3}} = 7,25 a,$$

wo *a* den Radius der Kugel bezeichnet.

2) Es ist von vornherein denkbar, daß die Drehung unter Zeichenwechsel den Wert Null annimmt, wenn man beim Variieren der Wellenlänge die Eigenwellenlänge der Resonatoren passiert.

3) Die Dimensionen des Modells sind in dem ausführlicheren Aufsatze des Verf.'s genau angegeben. In seiner Theorie setzt Oseen voraus, daß die Abstände zwischen den benachbarten Resonatoren des Molekülmodells wesentlich kleiner als die Länge der einfallenden Wellen (eigentlich klein gegen sie) sind.

gedreht worden war, wurde eine Drehung der Polarisations-ebene  $= 6^\circ$  in demselben Sinne wie vorher erhalten. Die Schachtel wurde dann noch so gedreht, daß die Wellen das Modell in entgegengesetzter Richtung gegen vorher passierten. Auch jetzt wurde eine Drehung der Polarisations-ebene von ungefähr derselben Größe und in demselben Sinne wie vorher beobachtet. Bezüglich der ursprünglichen Orientierung des Modelles zur Strahlenrichtung und der mit anderen Wellenlängen mit demselben Modelle ausgeführten Versuche verweise ich hier auf meinen ausführlicheren, auf S. 546 erwähnten Bericht.

3. Als ich im Herbst 1923 diese Versuche wieder aufnahm, zeigte es sich, daß die soeben erwähnten ersten Versuche nicht einwandfrei waren. Durch eine ganze Reihe von Versuchen (vgl. den ausführlichen Aufsatz) konnte jetzt nachgewiesen werden, daß die Wand des Metallrohres *U*, gegen welche das an sich asymmetrische Molekülmodell, das sich innerhalb dieses Rohres befand, eine unsymmetrische Stellung einnahm, einen störenden Einfluß auf die elektrischen Schwingungen der kugelförmigen Resonatoren und dadurch auch auf die beobachteten Drehungen der Polarisations-ebene ausübte, so daß diese Drehungen nicht von dem Molekülmodell allein, sondern von ihm im Verein mit den umschließenden Metallrohre herührten.<sup>1)</sup> Bei Untersuchung der von dem Molekülmodelle allein eventuell erzeugten Wirkung mußte also das Modell außerhalb des Metallrohres, entweder vor oder hinter ihm, aufgestellt werden, so daß das Rohr (nebst dem Schirme *S* in der oben erwähnten Figur) nur zur Begrenzung des Strahlenbündels diente. Ein Einfluß der in der Pappschachtel etwas ungleichmäßig verteilten Baumwolle war dagegen nicht zu befürchten, weil,

---

1) Bei den in der Einleitung und auf S. 546 erwähnten Versuchen mit dem aus mehreren Hunderten spiralförmigen Resonatoren bestehenden Raumgitter machte sich eine derartige Wirkung des Metallrohres *U* nicht geltend, denn die Drehung der Polarisations-ebene war dabei unabhängig davon, ob das Gitter von dem Metallrohr umschlossen war oder nicht, was auch erklärlich ist, da das Rohr in diesem Falle stets eine symmetrische Stellung zu dem Gitter hatte, das als Ganzes keine Asymmetrie zeigte. Das Rohr wurde bei diesen Versuchen nur zur Verhinderung der Zerstreuung der Wellen benutzt (vgl. die Fußnote 2 auf S. 627 in Ann. d. Phys. 63. 1920).



wie durch besondere Versuche konstatiert wurde, die Baumwolle allein kaum eine merkbare Schwächung des durch sie hindurchgehenden Strahlenbündels erzeugte.

4. Bei den neuen Versuchen, die jetzt mit tetraedrischen Molekülmodellen ausgeführt wurden, war die Pappschachtel, die das Modell enthielt, aus dem Rohre *U* nach *R* zu stets soviel herausgezogen, daß sich das Modell vollständig außerhalb des Rohres befand. Der Abstand zwischen der Mitte des Tetraeders und dem Meßresonator *R* war dabei etwa 90 cm, während der Abstand zwischen der durch den Rand des Rohres *U* gelegten Ebene und der Oberfläche der am nächsten zu dieser Ebene liegenden Kugel mindestens 6 oder 7 cm war. Eine Vergrößerung des letztgenannten Abstandes zu etwa 15 cm (wie auch eine Verkleinerung des Abstandes zwischen *U* nach *R*) hatte bei wiederholten Versuchen keinen merkbaren Einfluß auf die von dem Molekülmodelle erzeugten Drehungen der Polarisationssebene. Irgendwelche vom Rohre *U* herührenden Störungen machten sich also nicht geltend, wenn sich das Molekülmodell in der erstgenannten Lage außerhalb des Rohres befand. Dies wurde auch durch gewisse später beschriebene Versuche bestätigt.

5. Bei den ersten im Moment 3 erwähnten Versuchen waren die Abstände zwischen den kugelförmigen Bestandteilen des Molekülmodells ganz willkürlich gewählt worden, wobei nur beachtet worden war, daß das Modell einen asymmetrischen Charakter erhielt. Bei den neuen Versuchen galt es zuerst, aus den vier kupfernen Hohlkugeln ein Molekülmodell von einer bestimmten asymmetrisch-tetraedrischen Form aufzubauen und die Kugeln dabei miteinander fest zu verbinden. Die Verbindung wurde mittels dünner Holzleisten<sup>1)</sup> erzielt, wobei die Enden der Leisten mit Syndetikon an den Kugeln geleimt wurden. Die vier Kugeln *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 1, I) wurden dabei asymmetrisch so geordnet, daß ihre Mittelpunkte mit je einem Eckpunkte eines Würfels zusammenfielen. Die Verbindungsfläche zwischen *A* und *B*, *B* und *C*, *C* und *D* waren alle 4 cm lang und also recht klein im Verhältnis zu der Eigenwellenlänge der Kugeln ( $2 \times 12,7$  cm). Weil der Radius der

1) Hinsichtlich der elektrischen Wellen verhielten sich diese Leisten wie vollkommene Isolatoren und übten auf die Wellen keine merkbare Wirkung aus.

Kugeln = 3,5 cm war, waren die Abstände zwischen den Mittelpunkten der genannten Kugeln = 11 cm (in Fig. 1 sind die Kugeln mit verhältnismäßig zu kleinem Radius gezeichnet). Außerdem den erwähnten Verbindungsleisten kamen solche auch vor zwischen den Kugeln *B* und *D*, *A* und *C*, *A* und *D*, wie in der Figur angedeutet ist. Von den vier rechtwinkligen

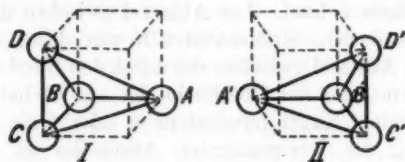


Fig. 1.

Dreiecken, die das Tetraeder begrenzen, waren, wie aus dem Gesagten hervorgeht, zwei und zwar *ABC* und *BCD* gleichschenkelig, kongruent und gleichgestellt im Verhältnis zu der außerhalb ihrer Ebene gelegenen Kugel (*D* bzw. *A*). Die beiden anderen miteinander kongruenten Dreiecke *ACD* und *ABD* waren ungleichseitig und auch gleichgestellt im Verhältnis zu der außerhalb ihrer Ebene gelegenen Kugel (*B* bzw. *C*).

Außer diesem Modelle (I) wurde schon im Anfang ein zweites (Fig. 1, II) aufgebaut, das das Spiegelbild des ersteren bildete. Außerdem wurden später andere Modelle angefertigt, die im Zusammenhang mit den Versuchen erwähnt werden.

6. Das Tetraeder I wurde jetzt anfänglich so gelegt, daß die durch das Rohr *U* hindurchgegangenen Wellen auf das Dreieck *ABC* (Fig. 1, I) annähernd senkrecht einfielen, während die Kugel *D* gegen *R* gekehrt war. Als die Kathete *AB* horizontal war und sich die Kugeln *C* und *D* unterhalb der durch *AB* gelegten Horizontalebene befanden, erhielt ich bei Drehung von *R* die Intensitätskurve II in Fig. 2. Es bezeichnen hier  $\delta$  den an der Gradscheibe des Empfängers abgelesenen Winkel (der Gradstrich  $90^\circ$  entspricht  $R \parallel O$ ) und  $\delta$  den Ausschlag des mit dem Meßresonator verbundenen Galvanometers, ausgedrückt in Prozenten von dem gleichzeitigen Ausschlage des mit dem Standardindikator verbundenen Galvanometers, d. h. die gemessene Strahlungsintensität. Man sieht, daß die Kurve II einen regelmäßigen Verlauf hat und diese

daß sie ein wenig nach rechts verschoben ist im Vergleich mit der Kurve I, die erhalten wurde, bevor das Tetraeder in die Pappschachtel eingeführt worden war (die Schachtel enthielt dann nur Baumwolle und befand sich in derselben Lage wie bei der Aufnahme der Kurve II). Für die Abszisse des Scheitelpunktes der Kurve II geben die Mittelpunkte der in der Figur

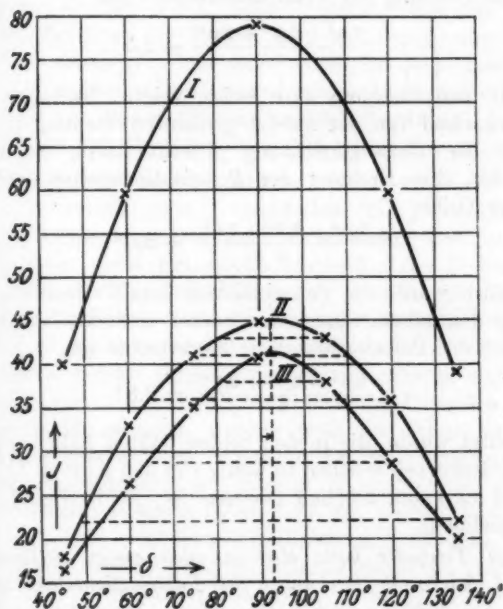


Fig. 2.

aufgezogenen zur Abszissenachse parallelen Sehnen dieser Kurve den Wert  $\frac{1}{4}(93,0^\circ + 92,5^\circ + 92,5^\circ + 92,0^\circ) = 92,5^\circ$ . Die zur  $\delta$ -Achse parallelen Sehnen der Kurve I werden dagegen sehr genau von der durch den Punkt  $\delta = 90^\circ$  gehenden Ordinate halbiert, welches zeigt, daß irgendeine Unsymmetrie in der Aufstellung der Apparate nicht vorhanden war (bei allen folgenden Versuchen wurden die Apparate nicht das mindeste von ihren jetzt eingenommenen Lagen verrückt). Als Ergebnis dieser Analyse der Kurven I und II in Fig. 2 ergibt sich also

eine  $2,5^\circ$  große Drehung der Schwingungs- bzw. Polarisations-ebene der Wellen in der Richtung nach rechts.

Nachdem die Pappschachtel mit dem Tetraeder  $90^\circ$  in der Uhrzeigerrichtung (für ein entgegen der Fortpflanzungsrichtung der Wellen blickendes Auge) um ihre geometrische Achse gedreht worden war, erhielt ich die Kurve III in Fig. 2, die eine Drehung der Polarisationsebene um

$$\frac{3,0^\circ + 2,5^\circ + 2,0^\circ}{3} = 2,5^\circ,$$

auch in der Richtung *nach rechts*, zeigt. Nachdem ich die Pappschachtel von der zuletzt genannten Stellung wieder um  $90^\circ$  in der Uhrzeigerrichtung gedreht hatte, erzeugte das Tetraeder eine Drehung der Polarisationsebene nach rechts von der Größe

$$\frac{2,5^\circ + 3,5^\circ + 3,0^\circ}{3} = 3,0^\circ.$$

Schließlich wurde die Schachtel mit dem Tetraeder noch um  $90^\circ$  in demselben Sinne wie vorher gedreht, wonach eine Drehung der Polarisationsebene nach rechts um

$$\frac{3,0^\circ + 3,0^\circ + 2,5^\circ}{3} = 2,8^\circ$$

beobachtet wurde (die in den beiden letzten Fällen erhaltenen Intensitätskurven weichen so wenig von den Kurven II bzw. III ab, daß es kaum möglich gewesen ist, sie in Fig. 2 deutlich aufzuzeichnen).

Das Tetraeder hatte also in allen diesen Stellungen annähernd gleichgroße Drehungen der Polarisationsebene und zwar alle in der Richtung nach rechts erzeugt. Im ersten und dritten und ebenso im zweiten und vierten Falle nahm das Tetraeder äquivalente Stellungen zu der Schwingungsebene der einfallenden Wellen ein (in den Fällen 1 und 3 befanden sich die Mittelpunkt der Kugeln A und B in derselben Horizontalebene, in den Fällen 2 und 4 in derselben Vertikalebene). Die entsprechenden Mittelwerte der Drehungswinkel sind

$$\frac{2,5^\circ + 3,0^\circ}{2} = 2,8^\circ \quad \text{bzw.} \quad \frac{2,5^\circ + 2,8^\circ}{2} = 2,7^\circ.$$

Die Drehung war also bei diesen Versuchen von der Stellung des Tetraeders im Verhältnis zu der Schwingungsebene der

Wellen nicht merkbar abhängig. Das Mittel der vier beobachteten Drehungswinkel ist

$$\frac{2,5^{\circ} + 2,5^{\circ} + 3,0^{\circ} + 2,8^{\circ}}{4} = 2,7^{\circ}.$$

Die Schachtel mit dem Tetraeder wurde jetzt so gekehrt, daß die Kugel *D* von den Wellen zuerst getroffen wurde, während das Dreieck *ABC* gegen *R* gekehrt war (die Wellen passierten also jetzt das Tetraeder in entgegengesetzter Richtung gegen vorher). Auch jetzt wurde bei zwei zueinander senkrechten Stellungen des Tetraeders eine Drehung der Polarisationssebene von (innerhalb der Genauigkeitsgrenzen) derselben Größe und in derselben Richtung wie vorher konstatiert.

7. Die Wellen waren bis jetzt annähernd senkrecht auf die Ebene des Dreiecks *ABC* eingefallen (die jedenfalls nicht sehr große Abweichung von dieser Orientierung des Tetraeders kann nunmehr nicht festgestellt werden). Die Stellung des Tetraeders in der Pappschachtel wurde jetzt so geändert, daß die Wellen die Ebene dieses Dreiecks schief trafen, während die Kugel *D* gegen *R* gekehrt war und sich an der Mittellinie der Schachtel befand (diese Linie ging annähernd durch den Mittelpunkt von *D* und den Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*). Die Intensitätsmessungen ergaben jetzt die beiden in Fig. 3 gezeichneten Kurven, von denen die Kurve I erhalten wurde, wenn die Mittelpunkte der Kugeln *A* und *C* in ein und derselben Horizontalebene lagen, und die Kurve II, wenn sie sich in ein und derselben Vertikalebene befanden. Beide Kurven zeigen eine Drehung der Polarisationssebene nach rechts um etwa  $3^{\circ}$ . Die Verkleinerung des Winkels zwischen den einfallenden Strahlen und der Ebene des Dreiecks *ABC* hatte also keine merkbare Veränderung der Drehung bewirkt.

8. Bei den zunächst folgenden Versuchen war das Tetraeder so orientiert, daß die einfallenden Wellen die Ebene des Dreiecks *ACD* (Fig. 1, I) annähernd senkrecht trafen, während die Kugel *B* gegen *R* gekehrt war. Als die Hypotenuse *AD* horizontal war, erhielt ich beim Variieren der Stellung von *R* die Kurve I in Fig. 4, die eine Drehung der Polarisationssebene um  $5^{\circ}$  nach rechts zeigt. Die Kurve II, die erhalten wurde, wenn sich *A* und *D* in ein und derselben Vertikalebene befanden, zeigt keine merkbare Drehung der Polarisationssebene. Wenn die Wellen

auf das ungleichseitige Dreieck  $ACD$  einfielen, war also die Größe der Drehung von der Stellung des Tetraeders zu der Schwingungsebene in recht hohem Grade abhängig, obwohl die Drehung auch jetzt (insofern sie nicht  $= 0$  war) stets in

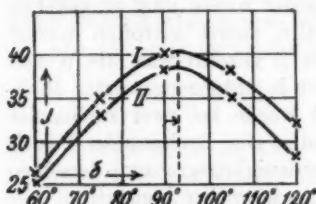


Fig. 3.

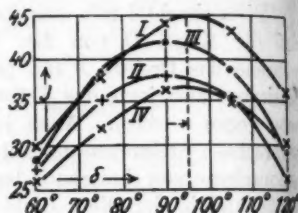


Fig. 4.

der Richtung nach rechts stattfand. Der Mittelwert der Drehungen,  $\frac{0^\circ + 5^\circ}{2} = 2,5^\circ$ , für verschiedene Stellungen des Tetraeders stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit den früher beobachteten Drehungen überein.

Nachdem ich die Pappschachtel mit dem Molekülmodelle so gedreht hatte, daß die Strahlen durch sie in der entgegengesetzten Richtung gegen vorher hindurchgingen (die Kugel B war also jetzt gegen  $O$  gekehrt), erhielt ich die Kurven III und IV in Fig. 4. Die erstere, die keine merkbare Drehung der Polarisationssebene zeigt, bezieht sich auf den Fall, daß  $A$  und  $D$  in ein und derselben Horizontalebene lagen, die letztere, die eine Drehung um  $5^\circ$  nach rechts zeigt, auf eine zu der vorigen senkrechten Stellung. Im Mittel wurde also auch jetzt eine ebensogroße Drehung nach rechts wie vorher erhalten, obwohl die Drehungen bei entsprechenden Stellungen des Tetraeders für die entgegengesetzten Strahlrichtungen komplementär waren, indem die Kurven I und III und ebenso II und IV, welche gleichen Stellungen der Hypotenuse  $AD$  entsprechen, für die eine Strahlenrichtung eine maximale und für die entgegengesetzte Strahlenrichtung keine merkbare Drehung anzeigen.

Diese Messungen wurden noch durch einen Versuch ergänzt, bei dem die Wellen die Ebene des Dreieckes  $ACD$  schief trafen, während die Kugel B gegen  $R$  gekehrt war und

ihr Mittelpunkt sich in der Nähe der Mittellinie der Pappschachtel befand. Für die Drehung der Polarisationssebene gaben die dabei erhaltenen Kurven — innerhalb der Fehlergrenzen — dieselben Werte ( $5^\circ$  bzw.  $0^\circ$ ), wie die in den entsprechenden Fällen früher erhaltenen (als die Wellen die Fläche  $ACD$  annähernd senkrecht trafen).

9. Hiermit war die Einwirkung des tetraedrischen Molekülmodelles I auf die Polarisationssebene wenigstens in den wesentlichsten verschiedenen Orientierungen des Tetraeders (im Verhältnis zu der Strahlenrichtung und der ursprünglichen Polarisationssebene), die vorkommen konnten, untersucht worden. Die Ergebnisse dieser Untersuchung können so zusammengefaßt werden, daß das betreffende Molekülmodell (I in Fig. 1) die Polarisationssebene der bei den Versuchen angewandten  $2 \times 8,8$  cm langen elektromagnetischen Wellen nach rechts um einen Betrag drehte, der von der Orientierung des Tetraeders abhing und, innerhalb der Grenzen  $0^\circ$  und  $5^\circ$  variierend, im Mittel = etwa  $2\frac{1}{2}^\circ$  war. Wenn das eine der beiden gleichschenkligen Dreiecke, die das Tetraeder begrenzten, entweder gegen den Oszillator oder gegen den Empfänger gekehrt war, so hing die Drehung von der Stellung des Tetraeders zu der Schwingungsebene nicht merkbar ab, wogegen sich eine solche Abhängigkeit sogar in hohem Grade geltend machte, wenn das eine der beiden ungleichseitigen Dreiecke eine solche Lage einnahm. Zu bemerken ist noch, daß die Wellen, auch nachdem sie das Molekülmodell passiert hatten, planpolarisiert waren, indem keine merkbare Wirkung auf den Meßresonator konstatiert werden konnte, wenn dieses zu der der maximalen Intensität entsprechenden Stellung senkrecht war.

10. Bei allen bis jetzt beschriebenen, mit dem Modell I ausgeführten Versuchen war die halbe Länge der Wellen =  $8,8$  cm und also etwas kleiner als die halbe Eigenwellenlänge ( $12,7$  cm) der kugelförmigen Resonatoren. Es wurden jetzt Versuche mit verschiedenen langen Wellen ausgeführt, während sich das Molekülmodell in derjenigen Lage befand, in der es soeben die Polarisationssebene der  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen um  $5^\circ$  gedreht hatte (die Wellen fielen also schief auf das Dreieck  $ACD$  ein, während  $A$  und  $D$  in ein und derselben Horizontalebene lagen). Die Ergebnisse aller dieser



Versuche sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt<sup>1)</sup>, wobei die — den größeren Wellenlängen entsprechenden — Drehungen nach links als positiv und diejenigen nach rechts als negativ bezeichnet sind.

$\frac{1}{2} \lambda$	$\varphi$
18 cm	$+ \frac{1}{2} (3,0^\circ + 3,0^\circ + 3,5^\circ) = + 3,2^\circ$
16 „	$+ \frac{1}{2} (3,0^\circ + 2,5^\circ + 2,5^\circ) = + 2,7^\circ$
14 „	..... etwa $+ 1,5^\circ$
11,9 „	$- \frac{1}{2} (1,5^\circ + 2,0^\circ + 3,2^\circ) = - 2,2^\circ$
8,8 „	$- \frac{1}{2} (6^\circ + 4,5^\circ + 4,5^\circ) = - 5,0^\circ$
6,0 „	..... etwa $- 4^\circ$

Die aus diesen Messungen hervorgehende Abhängigkeit der Drehung ( $\varphi$ ) von der Wellenlänge ( $\lambda$ ) wird durch die Kurve in Fig. 5 graphisch dargestellt. Es hat diese Kurve ganz denselben Charakter wie die entsprechende Kurve, die ich früher

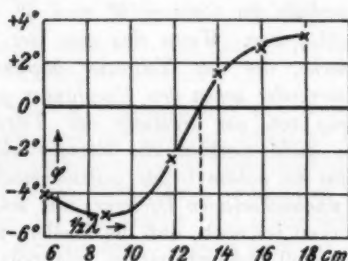


Fig. 5.

erhalten hatte bei meinen Versuchen über die von einem aus spiralförmigen Resonatoren bestehenden Rauggitter erzeugte Drehung und welche in guter Übereinstimmung sowohl mit der Drude-Natansonschen Theorie für die natürliche Drehung wie auch mit neueren optischen Versuchen steht.<sup>2)</sup> Man findet demnach, daß die Drehung ( $\varphi$ ) unter Zeichenwechsel den Wert Null für eine Wellenlänge  $\lambda = 2 \times 13,2$  cm

1) Die in den verschiedenen Fällen jetzt und im folgenden erhaltenen Intensitätskurven und die ihnen zugrunde liegenden Beobachtungen finden sich sämtlich in dem ausführlicheren, auf S. 546 erwähnten Berichte.

2) Vgl. Ann. d. Phys. 69. S. 270—284. 1922.

annimmt, die von der Wellenlänge der freien Eigenschwingungen der kugelförmigen Resonatoren ( $\lambda_0 = 2 \times 12,7$  cm) nur sehr wenig abweicht. Daß jene Wellenlänge ein wenig größer als diese ist, kann dadurch erklärt werden, daß die Kapazität und folglich auch die Schwingungsperiode der Metallkugeln etwas vergrößert wurden, als sie in dem tetraedrischen Modelle in die Nähe voneinander gebracht wurden. Auf jeder Seite von der Wellenlänge, für welche  $\varphi = 0$  ist, hat  $\varphi$  einen Extremwert, wobei derjenige auf der Seite der kleineren Wellenlängen der größere ist (der Maximalpunkt der Kurve kann offenbar nicht weit von  $\frac{1}{2} \lambda = 18$  cm liegen). Wie die kürzeren Wellen, waren auch die längeren nach dem Passieren des Molekülmodelles wenigstens sehr nahe geradlinig polarisiert; während diejenigen Wellen, welche bei meinen früheren Versuchen das aus schraubenförmigen Resonatoren bestehende Raumgitter verlassen hatten, deutlich elliptisch potensiert waren, falls  $\lambda = \lambda_0$  war oder nur wenig von diesem Werte abwich. Diese Verschiedenheit ist wahrscheinlich dadurch bedingt, daß das selektive Absorptionsvermögen der kugelförmigen Resonatoren erheblich weniger ausgeprägt war als das der spiralförmigen Resonatoren, weshalb die Absorption in dem erstgenannten Falle sogar in der Nähe der Eigenfrequenz der Resonatoren relativ gering war.

Wie aus Fig. 5 hervorgeht, war die Drehung am größten für eine Wellenlänge, die mit der bei den Versuchen zuerst und am meisten angewandten Wellenlänge  $\lambda = 2 \times 8,8$  cm fast ganz übereinstimmte, was für das Gelingen der Versuche besonders günstig gewesen ist. Die auf S. 547 erwähnten Gründe für die Wahl (bei den ersten Versuchen) einer Wellenlänge, die ein wenig kleiner als die Eigenwellenlänge der kugelförmigen Resonatoren war, haben sich demnach als ganz berechtigt erwiesen.

Zur Prüfung der Schlußfolgerung, daß die Drehung  $= 0$  für  $\lambda = 2 \times 13,2$  cm sei, machte ich noch einen Versuch mit Wellen von dieser Länge. Eine Drehung der Polarisationssebene konnte in der Tat in diesem Falle nicht beobachtet werden, und irgendeine Elliptizität der Schwingungen könnte auch jetzt nicht sicher festgestellt werden. Es würde von Interesse sein, zu erfahren, ob die Oseensche Theorie den Wechsel des Vorzeichens vorauszusehen läßt, den die Drehung

nach den oben beschriebenen Versuchen erfährt, wenn man beim Variieren der Wellenlänge die Eigenwellenlänge der Resonatoren passiert.

Ob die Drehungskurve in Fig. 5 in ihrem Verlauf mit der Natansonschen Formel<sup>1)</sup> exakt übereinstimmt, habe ich nicht untersucht, weil die beobachteten Drehungen infolge ihrer geringen Größe nicht so genau bestimmt werden konnten, wie für eine derartige quantitative Prüfung wünschenswert gewesen wäre. Die eventuellen Abweichungen von dieser, durch meine früheren Versuche mit schraubenförmigen Resonatoren bestätigten Formel dürften jedoch kaum größer sein, als daß sie durch Versuchsfehler erklärt werden können (zu bemerken ist, daß sich diese Formel nicht auf eine spezielle Vorstellung von dem Bau der aktiven Moleküle gründet).

Versuche mit Wellen, die im Verhältnis zu der Eigenwellenlänge der Resonatoren groß waren, konnten mit Hilfe der bei dieser Untersuchung angewandten Versuchsanordnung nicht ausgeführt werden, weil die Drehungen, die alsdann zu erhalten waren, aller Wahrscheinlichkeit nach zu klein gewesen wären, um mit irgendeiner Sicherheit festgestellt werden zu können. Durch Anwendung eines aus zahlreichen kleinen tetraedrischen Molekülmodellen bestehenden dreidimensionalen Systems, das als Ganzes ein Modell einer optisch aktiven isotropen Substanz bilden würde, werde ich eventuell später in der Lage sein, Versuche von der erwähnten Art auszuführen.

11. Obwohl die zuletzt beschriebenen Versuche zweifellos ergeben hatten, daß unter im übrigen gleichen Umständen die Drehung von dem Verhältnis der Länge der einfallenden Wellen zu der Eigenwellenlänge der kugelförmigen Resonatoren abhing, war es noch denkbar, daß die Drehung auch — außer von der geometrischen Asymmetrie des Molekülmodelles — von dem Verhältnis der Größe des Modelles zu der Eigenwellenlänge der Resonatoren abhängig wäre. Wenn nämlich die Abstände

1) Vgl. Ann. d. Phys. 69, S. 271, Formel (2). 1922. — Es mag hier ein an derselben Stelle (S. 272) vorkommender und dieselbe Formel betreffender Druckfehler berichtigt werden. Es muß nämlich der im Nenner der Formel (2a), S. 272, vorkommende Faktor  $k$  nicht innerhalb, sondern, wie man sofort einsieht, außerhalb der Klammer stehen.

zwischen den Mittelpunkten der Resonatoren in demselben Verhältnis verändert werden, so muß auch dies eine Veränderung der Wechselwirkung der hinsichtlich ihrer Größe unveränderten Resonatoren sowie auch der Kapazität bzw. der Eigenperiode derselben herbeiführen können; außerdem treffen — bei unveränderter Orientierung des Tetraeders — die einfallenden Wellenimpulse die verschiedenen Resonatoren dann mit anderen relativen Schwingungsphasen wie vorher.

Um diese Frage nicht ganz dahin zu lassen, wurden einige Versuche mit einem Modell (III) ausgeführt, das ganz dieselbe asymmetrisch-tetraedrische Form wie das vorher benutzte hatte, aber kleiner als dieses war, indem die Verbindungsstücke zwischen den nächstgelegenen Kugeln in dem neuen Modell nur 1 cm anstatt wie vorher 4 cm waren. Weil die Kugeln von derselben Größe wie die zu dem Modell I gehörigen waren und also einen Radius  $= 3,5$  cm hatten, waren also die Abstände zwischen den Mittelpunkten der entsprechenden Kugeln im Verhältnis 11:8 verkleinert worden. Wenn das Modell III auf dieselbe Weise orientiert war, wie das Modell I, als dieses eine  $5^\circ$  große Drehung der Polarisationssebene der  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen erzeugte, erhielt ich bei einem Versuche mit Wellen von dieser Länge eine Drehung um etwa  $4^\circ$  nach rechts, und wenn das Modell III in eine Stellung gebracht wurde, bei der das Modell I eine Drehung von  $2,5-3^\circ$  gegeben hatte, konnte *keine Drehung* sicher festgestellt werden. Es ist denkbar, daß, wenn die Wellen die erwähnte Länge hatten, die Schwingungen der im Modell III relativ dicht angehäuften Resonatoren einander schwächten und daß dies eine Verringerung des Drehungsvermögens des Modelles zur Folge hatte. Gegen diese Versuche kann vielleicht eingewandt werden, daß das Modell III hauptsächlich von dem zentralen Teil des Strahlenbündels getroffen wurde, während auf das Modell I auch die peripherischen Teile des Strahlenbündels einwirkten, welcher Einwand übrigens in gewissem Grade auch bei den früheren Versuchen zutrifft, bei denen das Modell I auf verschiedene Weise orientiert war. Von wesentlicher Bedeutung konnte dieser Umstand jedoch nicht sein, da ein Versuch mit vier an den Ecken eines zu dem Strahlenbündel senkrechten Quadrates geordneten Kugeln von der vorher benutzten Größe ergab, daß das Absorptionsvermögen des Kugelsystems davon

unabhängig war, ob die Kugeln um den zentralen Strahl dicht angehäuft waren oder ob sie eine mehr peripherische Lage (in der Nähe der Schachtelwand) hatten.

12. Die in den Momenten 6–10 beschriebenen Versuche waren alle mit ein und demselben tetraedrischen Molekülmodelle (I in Fig. 1) ausgeführt. Wenn nun die beobachteten Drehungen wirklich durch die geometrische Asymmetrie des Tetraeders bedingt waren, so müßte man erwarten, daß ein tetraedrisches Molekülmodell, welches das Spiegelbild des ersteren bildete, gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Drehungen wie das zuerst genannte erzeugen würde. Daß dies wirklich der Fall war, ging aus denjenigen Versuchen hervor, die jetzt mit dem Modelle II in Fig. 1 ausgeführt wurden.

Als die  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen annähernd senkrecht auf das gleichschenklige Dreieck  $A'B'C'$  einfielen, während die Kugel  $D'$  gegen  $R$  gekehrt war, erhielt ich die in Fig. 6

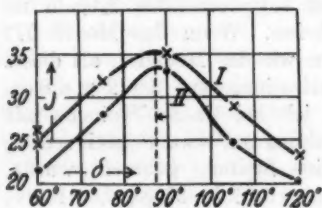


Fig. 6.

wiedergegebenen Kurven, von denen I einer horizontalen und II einer vertikalen Stellung der Hypotenuse  $A'C'$  entsprechen. In beiden Fällen war, wie aus der Gestalt der Kurven hervorgeht, die Polarisationssebene nach links gedreht worden und zwar um einen angenähert gleich großen Betrag (etwa  $2,5^\circ$ ), wie sie bei dem entsprechenden Versuche mit dem Modell I nach rechts gedreht worden war.

Wenn dagegen das ungleichseitige Dreieck  $A'C'D'$  gegen die Wellen gekehrt war, erhielt ich bei einer gewissen Stellung des Tetraeders eine Drehung um  $5^\circ$  nach links und bei einer zu der vorigen senkrechten Stellung keine merkbare Drehung.

13. Das Tetraeder II, das bei den soeben erwähnten Versuchen in der vom Metallrohre  $U$  nach  $R$  zu ausgezogenen Pappschachtel eingeschlossen war, wurde jetzt vor der gegen den Oszillator ( $O$ ) gekehrten Öffnung des Metallrohres mittels langer Bindfäden in einer solchen Stellung aufgehängt, daß das Dreieck  $A'B'C'$  gegen  $O$  gekehrt war, während die Kugel  $D'$  gegen die Mitte der erwähnten Öffnung des Metallrohres  $U$  gekehrt war. Zwischen der anderen Öffnung des

Metallrohres (ein wenig davon entfernt) und dem Meßresonator  $R$  wurde gleichzeitig das Tetraeder I in seine alte Lage in der Pappschachtel gebracht und dabei so orientiert, daß seine Stellung der des Tetraeders II entsprach. Die von  $O$  kommenden  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen passierten also zuerst das linksdrehende Tetraeder II, gingen dann durch das Metallrohr hindurch und passierten nachher das rechtsdrehende Tetraeder I. Beim Variieren der Stellung des Meßresonators

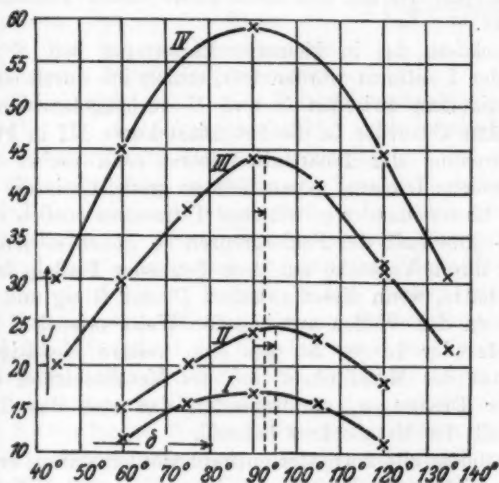


Fig. 7.

erhielt ich dann die Kurve I in Fig. 7, welche zeigt, daß, wie auch zu erwarten war, die Drehungswirkungen der beiden Tetraeder einander aufhoben. Weil bei diesem Versuche die beiden Tetraeder entgegengesetzte Stellungen zu dem zwischen ihnen vorkommenden Metallrohre  $U$  einnahmen und in sehr verschiedenen Entfernungen von dem Metallschirme  $S$  waren, wird durch das Ergebnis des Versuches bestätigt, daß die von ihnen erzeugten (entgegengesetzten) Drehungen weder von dem Metallrohre  $U$  noch von dem Metallschirme  $S$  beeinflusst wurden. Auf den von dem linksdrehenden Tetraeder (II) soeben eingenommenen Platz vor dem Metallrohr (zwischen diesem

und *O*) wurde jetzt ein neues rechtsdrehendes Tetraeder (*Ia*) von genau derselben Größe und Form wie das in der Pappschachtel (zwischen *U* und *R*) vorkommende Tetraeder *I* aufgehängt und dabei auf dieselbe Weise wie dieses orientiert. Die  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen hatten also jetzt zwei hintereinander geordnete gleiche und gleichorientierte rechtsdrehende Tetraeder zu passieren. Die dabei erhaltene Intensitätskurve *II* in Fig. 7 zeigt eine ungefähr *doppelt so große Drehung* (etwa  $5^\circ$ ) wie die mit dem einen dieser beiden Tetraeder vorher erhaltene.

Nachdem das in kleinerer Entfernung von *R* gelegene Tetraeder *I* entfernt worden war, erhielt ich durch einen Versuch mit dem zwischen *O* und *U* zurückgelassenen rechtsdrehenden Tetraeder *Ia* die Intensitätskurve *III* in Fig. 7, die eine Drehung der Polarisationssebene nach rechts um  $2,5^\circ$  zeigt, welche Drehung genau halb so groß ist wie die mit den beiden hintereinander geordneten Tetraedern soeben erhaltene und — innerhalb der Fehlergrenzen — gleich derjenigen ist, die ich durch Versuche mit dem Tetraeder *I* allein früher erhalten hatte, wenn dieses zwischen *U* und *R* lag und im Verhältnis zu den Wellen auf dieselbe Weise orientiert war wie das Tetraeder *Ia* (es ist dies eine weitere Bestätigung der Passivität des Metallrohres und des Metallschirmes hinsichtlich der Drehungen, vorausgesetzt, daß sich das Tetraeder außerhalb des Metallrohres befand).

Nachdem alle Tetraeder entfernt worden waren, erhielt ich die Intensitätskurve *IV* in Fig. 7, deren regelmäßiger Verlauf bestätigt, daß keine Unsymmetrie in der Versuchsanordnung bei den hier beschriebenen Versuchen vorhanden war. Daß ihr höchster Punkt nicht so hoch liegt wie derjenige der entsprechenden Kurve *I* in Fig. 2, erklärt sich dadurch, daß der Standardindikator in den beiden Fällen eine etwas verschiedene Länge hatte (die Empfindlichkeit der Thermoelemente hatte sich wahrscheinlich auch im Verlauf der Untersuchung ein wenig geändert).

14. Wie früher hervorgehoben worden ist, waren die kugelförmigen Resonatoren bei den bisher untersuchten Molekülmodellen so geordnet, daß ihre Mittelpunkte mit je einem Eckpunkte eines Würfels zusammenfielen. Da es von Interesse war, auch ein auf andere Weise aufgebautes Molekül-



modell zu untersuchen, wurde ein neues tetraedrisches Modell von der in Fig. 8 angegebenen Form aufgebaut. Vier Kupferkugeln,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ , von derselben Größe wie die vorher benutzten (Radius = 3,5 cm) wurden dabei so geordnet, daß ihre Mittelpunkte sich an den Ecken eines Rhomboeders befanden. Bei dem so erhaltenen rhomboedrisch asymmetrischen Tetraeder (dem Molekülmodell IV) waren die Abstände zwischen den Kugelmittelpunkten die in der Figur angegebenen. Von den vier Dreiecken, die dieses Tetraeder begrenzten, war demnach  $\triangle CDB$  gleichseitig,  $\triangle ABD$  gleichschenkelig und fast rechtwinklig,  $\triangle ABC$  gleichschenkelig und stumpfwinklig,  $\triangle ADC$  ungleichseitig und fast rechtwinklig. Bei den mit diesem Molekülmodelle ausgeführten Versuchen befand sich das Modell (in Baumwolle eingebettet) in der früher benutzten, vom Metallrohre  $U$  gegen  $R$  ausgezogenen Pappschachtel. Das Modell wurde anfänglich so orientiert, daß die Wellen zuerst das gleichseitige Dreieck  $DBC$  trafen, wobei die Linie  $BC$  horizontal und senkrecht zur Strahlenrichtung war, während der Mittelpunkt der Kugel  $A$  annähernd in der durch  $BC$  gelegten Horizontalebene lag. In dieser Lage erzeugte das Modell keine merkbare Drehung der Polarisationssebene der  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen. Eine solche konnte auch nicht konstatiert werden, nachdem die Pappschachtel mit dem Modelle  $90^\circ$  bzw.  $45^\circ$  um ihre geometrische Achse gedreht worden war und auch nicht dann, wenn die Wellen das Modell in entgegengesetzter Richtung passierten.

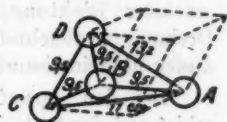


Fig. 8.

Das Modell erhielt dann eine solche Stellung, daß die Wellen zuerst das gleichschenkelige Dreieck  $ABD$  trafen. Die Orientierung des Modelles kann im übrigen in diesem Falle vielleicht am einfachsten dadurch charakterisiert werden, daß die Kugeln  $D$ ,  $A$  und  $B$ , welche in dieser Ordnung von den Wellen getroffen wurden, in einer linksgewundenen Spirale um die Mittellinie der Schachtel geordnet waren, während der Mittelpunkt der gegen  $R$  gekehrten Kugel  $C$  approximativ in der durch  $AB$  gelegten zur Strahlenrichtung parallelen Ebene lag. Durch die Versuche mit dem im Verhältnis zur Strahlenrichtung so orientierten Modelle erhielt ich zwei Intensitäts-

kurven, von denen die eine einer horizontalen und die andere einer vertikalen Stellung der soeben erwähnten durch  $AB$  gelegten Ebene entsprachen. Beide Kurven zeigten übereinstimmend eine Drehung der Polarisationssebene um  $5^\circ$  nach rechts. Wenn das Tetraeder von den Wellen in entgegengesetzter Richtung gegen vorher trafen, wurde auch eine Drehung beobachtet, die innerhalb der Fehlergrenzen mit dieser übereinstimmte.

Bei den darauf folgenden Versuchen fielen die Wellen schief auf das ungleichseitige Dreieck  $ACD$  ein. Die Kugeln  $A$ ,  $C$  und  $D$  waren dabei in einer linksgewundenen Spirale um die Mittellinie der Schachtel geordnet, während der Mittelpunkt der gegen  $R$  gekehrten Kugel  $B$  in der durch  $AC$  parallel zur Strahlenrichtung gelegten Ebene und zugleich auch in der durch die Mittellinie der Schachtel zu der vorigen senkrecht gelegten Ebene lag. Wenn die soeben erwähnte, durch  $AC$  gelegte Ebene horizontal war, erhielt ich durch Variieren der Stellung von  $R$  eine Kurve, die eine Drehung der Polarisationssebene um  $5^\circ$  nach rechts zeigte. War dagegen die betreffende Ebene vertikal, so konnte keine merkbare Drehung beobachtet werden. Nachdem die Schachtel mit dem Tetraeder  $180^\circ$  um eine vertikale Achse gedreht worden war, so daß die Wellen das Tetraeder in entgegengesetzter Richtung gegen vorhin passierten, wurden wieder zwei Intensitätskurven aufgenommen, von welchen die eine einer vertikalen und die andere einer horizontalen Stellung der genannten durch  $AC$  parallel zur Strahlenrichtung gelegten Ebene entsprachen. Die erstere zeigte eine Drehung der Polarisationssebene um  $6^\circ$  nach rechts, die letztere keine merkbare Drehung. Wie bei den entsprechenden mit dem kubisch asymmetrischen Modelle I ausgeführten Versuchen (vgl. Mom. 8), waren also auch jetzt die Drehungen bei entsprechenden Stellungen des Tetraeders für entgegengesetzte Strahlenrichtungen komplementär.

Schließlich wurde das Modell IV so orientiert, daß die Wellen auf das gleichschenklige stumpfwinklige Dreieck  $ABC$  schief einfielen. Die Kugeln  $A$ ,  $B$  und  $C$  waren dabei in einer linksgewundenen Spirale um die Mittellinie der Schachtel geordnet, während der Mittelpunkt der gegen  $R$  gekehrten Kugel  $D$  in der durch die Mittellinie der Schachtel und den

Mittelpunkt der Kugel *B* gelegten Ebene lag (die Mittelpunkte von *D* und *B* lagen folglich auf entgegengesetzten Seiten der genannten Mittellinie und annähernd in gleichen Abständen von ihr). Die Versuche ergaben jetzt zwei Intensitätskurven, von welchen die eine einer horizontalen und die andere einer vertikalen Stellung der durch *AB* parallel zur Strahlenrichtung gelegten Ebene entsprachen. Diese Kurven zeigten beide eine Drehung der Polarisationssebene *nach links*. Der Drehungswinkel war nach jener Kurve

$$\frac{2,3^{\circ} + 2,5^{\circ} + 3,0^{\circ}}{3} = 2,6^{\circ}$$

und nach dieser

$$\frac{2,5^{\circ} + 3,0^{\circ} + 3,0^{\circ}}{2} = 2,8^{\circ}$$

und folglich innerhalb der Fehlergrenzen unabhängig von der Stellung des Tetraeders zu der Schwingungsebene der einfallenden Wellen. Wenn die Wellen das Tetraeder in entgegengesetzter Richtung gegen vorhin passierten, so konnte eine Drehung der Polarisationssebene nicht sicher festgestellt werden.

Das rhomboedrisch asymmetrische Molekülmodell IV hatte sich also bei den oben genannten verschiedenen Orientierungen in den meisten Fällen als rechtsdrehend erwiesen, indem es nur in einem Falle linksdrehend war und in einigen Fällen kein merkbares Drehungsvermögen hatte. Das betreffende Modell hatte folglich — für Wellen von der Länge  $2 \times 8,8$  cm — einen hauptsächlich rechtsdrehenden Charakter, was bedeutet, daß ein aus einer großen Anzahl solcher im Raume regellos verschieden gerichteter Molekülmodelle bestehendes System für Wellen von der erwähnten Länge rechtsdrehend wäre und demnach einem rechtsdrehenden isotropen Körper (Flüssigkeit von Gas) entsprechen würde. Wenn man sich vorstellt, daß die Moleküle eines solchen Körpers einen tetraedrischen Bau mit im allgemeinen rhomboedrischer Asymmetrie haben, wobei die in den Ecken des Tetraeders sitzenden Atomgruppen die Rolle von isotropen elektrischen Resonatoren spielen, so muß man sich denken, daß im allgemeinen, je nach der zufälligen Orientierung der einzelnen Moleküle, gewisse Moleküle rechtsdrehend, andere linksdrehend und die übrigen nichtdrehend sind, wobei jedoch die Drehungen in einer Richtung dominieren und den Charakter der resultierenden Drehung bestimmen.

15. Ein Molekülmodell, das aus vier in den Ecken eines regulären Tetraeders liegenden untereinander gleichen Metallkugeln besteht, kann aus Symmetriegründen wenigstens durchschnittlich kein Drehungsvermögen haben. Es ist aber denkbar, daß es jedoch bei verschiedenen Orientierungen Drehungen von verschiedener Größe und von entgegengesetzten Vorzeichen erzeugt, obwohl ihre algebraische Summe  $= 0$  ist. Zur Prüfung, wie es sich hiermit verhält, wurden einige Versuche mit einem Modelle (V) der soeben erwähnten Art ausgeführt (die Abstände zwischen den Mittelpunkten der Kugeln waren alle  $= 11$  cm; der Kugelradius war wieder  $= 3,5$  cm). Bei verschiedenen Orientierungen des Modelles konnte jedoch keine von ihm erzeugte Drehung der Polarisationssebene der  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen nachgewiesen werden.

16. Bei den bis jetzt beschriebenen Versuchen hatten die Molekülmodelle aus vier gleich großen Kupferkugeln vom Durchmesser 7 cm bestanden. Da es von Interesse war, auch ein Modell zu untersuchen, das aus wenigstens teilweise verschieden großen Kugeln bestand, wurde jetzt das vorher benutzte Modell IV (Fig. 8) in der Weise verändert, daß die beiden mittleren Kugeln B und D bei ihm durch kleinere Kugeln aus Messing vom Durchmesser 5,6 cm ersetzt wurde, während sämtliche Abstände zwischen den Mittelpunkten der vier dem Modelle gehörigen Kugeln unverändert blieben. Nach der in der Fußnote 1 auf S. 547 erwähnten Formel von J. J. Thomson entsprachen der Eigenschwingung dieser kleineren Kugeln eine halbe Wellenlänge in Luft  $\frac{1}{2} \lambda_0 = 7,25 \cdot \frac{34}{1} = 10,2$  cm. Diese Kugeln standen folglich in wesentlich besserer Resonanz mit den  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen, die bei den folgenden (wie auch bei den meisten vorigen) Versuchen angewandt wurden, als der Fall war mit den großen Kupferkugeln, deren halbe Eigenwellenlänge gleich etwa 13 cm war (die Verschiedenheit des Materials — Kupfer und Messing — kommt hier kaum in Betracht).

Das neue Modell (VI), das wieder in die früher benutzte Pappschachtel gebracht wurde, erhielt zuerst genau dieselbe Lage und Orientierung, wie das Modell IV bei dem ersten der auf S. 564 erwähnten Versuche gehabt hatte, bei denen die Wellen auf das ungleichseitige Dreieck  $ACD$  einfielen. Als Ergebnis der mit dem Modell VI ausgeführten

Versuche erhielt ich eine Kurve, welche eine Drehung der Polarisationssebene um  $\frac{1}{2}(2,5^\circ + 2,5^\circ + 3,5^\circ) = 2,8^\circ$  nach rechts zeigte. In einer zu der vorigen senkrechten Stellung gab das Modell keine merkbare Drehung. Als die Wellen das Modell in entgegengesetzter Richtung gegen vorher passierten, erhielt ich, wenn das Modell sonst auf dieselbe Weise wie in dem zuletzt erwähnten Falle orientiert war, eine Intensitätskurve, die eine Drehung um  $\frac{1}{4}(2 \cdot 2,7^\circ + 4,0^\circ + 4,7^\circ) = 3,5^\circ$  nach rechts zeigte. In einer dazu senkrechten Stellung konnte wieder keine Drehung beobachtet werden. Qualitativ stimmen diese Ergebnisse mit den mit dem Modell IV gemachten Beobachtungen vollständig überein. Bezüglich ihrer Größe sind dagegen die jetzt beobachteten Drehungen nur etwa halb so groß wie die letztgenannten (vgl. S. 564). Daß das Modell VI also wesentlich kleinere Drehungen als das Modell IV erzeugte, obwohl zwei jenem Modelle gehörige Resonatoren in besserer Resonanz mit den Wellen standen als sämtliche Resonatoren des letzterwähnten Modelles, kann — da die entsprechenden Abstände zwischen den Kugelmittelpunkten in beiden Modellen gleich groß waren — nur darauf beruhen, daß die gegenseitige Resonanz zwischen den ein und demselben Modelle gehörigen Resonatoren bei dem Modelle VI wesentlich schlechter war als bei dem Modelle IV. Dies steht auch im Einklang mit der Oseenschen Theorie, nach der die Drehung wesentlich durch die gegenseitige Wechselwirkung der Resonatoren bedingt ist, und zeigt auch, daß ein asymmetrisch tetraedrisches Molekülmodell von der von Stark angegebenen Art (vgl. Einleitung, S. 543), bei dem eine solche Wechselwirkung nicht vorausgesetzt wird, kaum ein merkbares Drehungsvermögen haben kann.

17. Eine besondere Bedeutung hat Oseen demjenigen Ergebnis seiner Theorie beigelegt, nach dem die Drehung, welche ein aus verschiedenen großen isotropen Resonatoren bestehendes asymmetrisch-tetraedrisches Molekül hervorruft — wenigstens unter gewissen Umständen — „nur von der geometrischen Asymmetrie der Molekel bedingt wird, so daß ein Umtausch der Resonatoren an sich die Drehung nicht beeinflusst“.<sup>1)</sup> Eine Prüfung dieser Schlußfolgerung konnte jetzt ohne Schwierigkeit dadurch bewerkstelligt werden, daß man in dem Modelle VI die mittleren und kleineren Kugeln (B und D) ihre

1) C. W. Oseen, a. a. O. S. 55.

Plätze mit den äußeren und größeren Kugeln (*A* und *C*) tauschen ließ. Wenn das so erhaltene Modell VII auf dieselbe Weise orientiert war wie das Modell VI bei der Aufnahme der im Mom. 16 erwähnten Kurven, erhielt ich zwei Intensitätskurven, die eine Drehung nach rechts um  $\frac{1}{3}$  ( $3,5^{\circ} + 3,0^{\circ} + 3,0^{\circ} = 3,2^{\circ}$  bzw.  $\frac{1}{3}$  ( $3,5^{\circ} + 2,5^{\circ} + 3,5^{\circ}) = 3,2^{\circ}$  zeigte, welche Werte innerhalb der Fehlergrenzen mit den entsprechenden, von dem Modelle VI erzeugten Drehungen ( $2,8^{\circ}$  bzw.  $3,5^{\circ}$ ) übereinstimmen (bei Stellungen des Modelles, die zu den letzterwähnten senkrecht waren, konnte wieder keine merkbare Wirkung beobachtet werden). Die soeben erwähnte Schlußfolgerung, daß ein Umtausch der zu ein und demselben Molekülmodelle gehörigen Resonatoren die Drehung nicht merkbar beeinflusst, ist hierdurch experimentell bestätigt worden.

18. Da es in der Stereochemie lange üblich war und auch noch sehr gewöhnlich sein dürfte, sich die verschiedenen Radikale eines asymmetrischen Kohlenstoffmoleküls an den Ecken eines regulären Tetraeders angeordnet zu denken, war es von einem gewissen Interesse, ein Modell (VIII) zu untersuchen, das aus vier verschieden großen, an den Ecken eines regulären Tetraeders befindlichen Metallkugeln bestand. Es wurde dieses Modell aus einer Kupferkugel vom Radius 3,5 cm und drei Messingkugeln mit den Radien 2,8, 2,5 und 2,2 cm so zusammengesetzt, daß jeder Abstand zwischen zwei Kugelmittelpunkten = 11 cm war (die halben Eigenwellenlängen der Kugeln waren nach der Thomsonschen Formel gleich bzw. 12,7 cm, 10,2 cm, 9,1 cm, 8,0 cm). Bei verschiedenen Orientierungen des Modelles konnte keine von ihm erzeugte Drehung der Polarisationssebene der  $2 \times 8,8$  cm langen Wellen nachgewiesen werden. Dies steht auch im Einklang mit dem, was man nach den im vorigen Mom. erwähnten Versuchen in diesem Falle erwarten kann. Falls nämlich das Modell VIII aktiv wäre, so müßte man durch Umtausch seiner Resonatoren, ohne Veränderung der geometrischen Form des durch die Kugelmittelpunkte bestimmten Tetraeders, den Sinn der von dem Modell bewirkten Drehung umkehren können, was aber im Widerspruch mit dem Ergebnisse steht, daß ein Umtausch der Resonatoren an sich die Drehung nicht beeinflusst (vorausgesetzt, daß dies auch für ein aus vier verschiedenen Resonatoren bestehendes Modell gilt).



## III. Versuche mit spiralförmigen Strukturmodellen.

1. Neun kupferne Hohlkugeln, deren Radius  $= 3,5$  cm war, wurden zuerst in der früher benutzten, mit Baumwolle gefüllten Pappschachtel in einer rechtsgewundenen Spirale so angeordnet, daß die Spiralachse mit der Mittellinie der Schachtel zusammenfiel. Der Radius der Spirale (der Abstand zwischen der Achse und den Mittelpunkten der Kugeln) war etwa 8 cm und die Länge der Achse (der Abstand zwischen den Projektionen der Mittelpunkte der beiden äußersten Kugeln auf der Achse)  $= 16$  cm. Obwohl die Kugeln sehr dicht aufeinander folgten, waren jedoch die benachbarten Kugeln stets durch eine Baumwollschicht voneinander getrennt. Die Schachtel wurde wieder in eine solche Lage gebracht, daß die Wellen, nachdem sie durch das Metallrohr  $U$  hindurchgegangen waren, die Kugelspirale passierten. Zur Vermeidung einer unsymmetrischen Lage der beiden äußersten Kugeln im Verhältnis zur Schwingungsebene der einfallenden Wellen (der elektrische Vektor war wieder vertikal) wurde die Spirale so orientiert, daß sich die Mittelpunkte dieser Kugeln auf entgegengesetzten Seiten der durch die Mittellinie der Schachtel gelegten Vertikalebene (in der Nähe von ihr) befanden. Als die halbe Eigenwellenlänge des Erregers und des mit ihm isochronen Meßresonators  $= 8,8$  cm war, erhielt ich beim Variieren der Stellung des Empfängers eine Intensitätskurve, die eine Drehung der Polarisationssebene nach rechts um  $\frac{1}{2}(6^\circ + 5^\circ + 5^\circ) = 5,3^\circ$  zeigte. — Nachdem die Kugeln in einer linksgewundenen Spirale von denselben Dimensionen wie die der vorigen Spirale angeordnet waren, beobachtete ich eine Drehung der Polarisationssebene nach links um  $\frac{1}{3}(7^\circ + 6^\circ + 5^\circ) = 6,0^\circ$ . Daß der Betrag der Drehung jetzt ein wenig (um  $0,7^\circ$ ) größer wie im vorigen Falle war, kann, außer durch die Beobachtungsfehler, dadurch erklärt werden, daß bei dem vorigen Versuche die rechtsgewundene Spirale, wie sich beim Öffnen der Pappschachtel zeigte, eine gewisse Deformierung erlitten hatte, indem bei der Einführung des zur Absperrung der Baumwolle dienenden Pappdeckels die beiden nächstliegenden Kugeln ein wenig nach innen verschoben worden waren, so daß ihre Mittelpunkte fast in ein und denselben, zur Spiralachse senkrechten Ebene lagen. Eine solche Unregelmäßigkeit kam



dagegen nicht vor bei der linksgewundenen Spirale, längs welcher die Kugeln bei dem letzten Versuche geordnet waren.

Bei unveränderter Wellenlänge ( $\lambda = 2 \times 8,8$  cm) änderte sich die Drehung nicht merkbar, wenn die Achsenlänge der Spirale von 16 cm zu 24 vergrößert wurde. Die im letztgenannten Falle mit der linksgewundenen Kugelspirale erhaltene Intensitätskurve gab nämlich für den Drehungswinkel ( $\varphi$ ) innerhalb der Fehlergrenzen denselben Wert,  $\frac{1}{3}(7,5^\circ + 6,0^\circ + 5,7^\circ) = 6,4^\circ$ , wie die mit der kürzeren Spirale erhaltene Kurve. Eine Verkleinerung des Radius der Spirale von etwa 8 cm zu etwa 6 cm bewirkte auch keine merkbare Veränderung des Drehungswinkels. Die Drehung der Polarisationsebene, die von einer bestimmten Anzahl spiralförmig angeordneter Resonatoren erzeugt wird, scheint also innerhalb gewisser Grenzen von der Achsenlänge und dem Radius der Spirale unabhängig zu sein (für sehr kleine Radien oder sehr große Achsenlängen kann dies natürlich nicht gelten).

2. Um die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge zu untersuchen, wurden Versuche mit Wellen von verschiedener Länge ausgeführt, wobei ein Strukturmodell benutzt wurde, bei dem die neun Kugeln in einer linksgewundenen Spirale von 21 cm Achsenlänge und 8 cm Radius angeordnet waren. Als Ergebnis dieser Versuche erhielt ich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte der Drehungen, wobei die den größeren Wellenlängen entsprechenden Drehungen nach rechts als positiv und die nach links als negativ bezeichnet worden sind.

$\frac{1}{2} \lambda$	$\varphi$
18 cm	$+\frac{1}{3}(4,5^\circ + 4,0^\circ + 4,3^\circ) = +4,8^\circ$
16 „	$+\frac{1}{3}(4,0^\circ + 3,5^\circ + 4,0^\circ) = +3,8^\circ$
14 „	$-\frac{1}{3}(2,5^\circ + 2,5^\circ + 3,0^\circ) = -2,7^\circ$
11,9 „	$-\frac{1}{3}(0^\circ + 0^\circ + 6,5^\circ) = -2,2^\circ$
8,8 „	$-\frac{1}{3}(6,5^\circ + 5^\circ + 4^\circ) = -5,2^\circ$

Weil die Ausschläge des mit dem Meßresonator verbundenen Galvanometers im Falle  $\frac{1}{2} \lambda = 8,8$  cm sehr klein waren und die Genauigkeit dieser Messungen folglich verhältnismäßig gering war, scheint es begründet, als Wert von  $\varphi$  für  $\frac{1}{2} \lambda = 8,8$  cm

das Mittel der jetzt und bei den früheren entsprechenden Versuchen erhaltenen Werte zu betrachten, also

$$\varphi = -\frac{1}{3}(5,2^\circ + 6,0^\circ + 6,4^\circ) = -5,9^\circ.$$

Die Beziehung zwischen  $\varphi$  und  $\frac{1}{2}\lambda$  wird durch die Kurve in Fig. 9 graphisch dargestellt. Man findet, daß sie einen ähnlichen Verlauf hat wie die entsprechende durch Versuche mit

einem asymmetrisch-tetraedrischen Molekülmodell früher erhaltene Kurve in Fig. 5, obwohl sie die Abszissenachse in einem Punkte ( $\frac{1}{2}\lambda = 14,6$  cm) schneidet, der etwas mehr nach rechts liegt, als der entsprechende Punkt der letztgenannten Kurve ( $\frac{1}{2}\lambda = 13,2$  cm). Diese Verschiedenheit ist wahrscheinlich dadurch bedingt, daß die kugelförmigen Resonatoren, die in beiden Fällen gleich groß waren, bei dem spiralförmigen Strukturmodelle wesentlich dichter angehäuft

waren (die benachbarten Kugeln lagen viel näher aneinander) als bei dem tetraedrischen Molekülmodelle, infolgedessen die Eigenperiode der Resonatoren in jenem Falle etwas größer war (vielleicht trug auch die umgebende Baumwolle, die bei den Versuchen mit der Kugelspirale dichter zusammengepackt war als bei den mit den tetraedrischen Modellen, zu einer Vergrößerung der Kapazität bzw. der Eigenperiode der Kugeln bei). Unter der Annahme, daß die Eigenwellenlänge der spiralförmig angeordneten Kugeln = 14,6 cm war, ergibt sich aus Fig. 9, daß das betreffende linksgewindene Strukturmodell die Polarisationssebene der Wellen nach links oder nach rechts drehte, je nachdem die Länge der Wellen kleiner oder größer als die Eigenwellenlänge der Resonatoren war. Auf jeder Seite der letztgenannten Wellenlänge hatte die Drehung einen Extremwert, wobei derjenige auf der Seite der kürzeren Wellenlängen der größere war.

Die hier festgestellte Abhängigkeit der Drehungsrichtung von der Spiralförmigkeit steht ganz im Einklang mit dem, was man

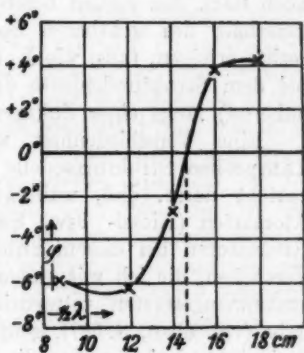


Fig. 9.

nach dem Bragg-Beckenkamp'schen Strukturmodelle (vgl. Einleitung) für rechts- bzw. linksdrehenden Quarz erwarten kann. Diejenigen Eigenschwingungen der Quarz-atome (die der optisch-aktiven Elektronen), welche das optische Drehungsvermögen dieser Substanz bedingen, gehören nämlich zu dem ultravioletten Teil des Spektrums<sup>1)</sup> und haben also eine kleinere Wellenlänge als das gewöhnliche Licht. Folglich muß auch nach den soeben beschriebenen Versuchen die Drehung innerhalb des sichtbaren Spektrums in der Richtung nach rechts erfolgen, falls, wie Beckenkamp annimmt, die Atome bei dem Strukturelemente des rechtsdrehenden Quarzes (annähernd) längs einer linksgewundenen Spirale geordnet sind.

Eine Verschiedenheit zwischen dem Bragg-Beckenkamp'schen Strukturmodelle und dem von mir untersuchten besteht darin, daß, während bei jenem zwei verschiedene Atomarten (Kiesel- bzw. Sauerstoffatome) vorkommen, alle Resonatoren bei diesem untereinander gleich sind. Aus den Versuchen, die ich mit einem aus verschiedenen großen Kugeln zusammengesetzten tetraedrischen Molekülmodell ausgeführt habe (vgl. oben, S. 567), geht jedoch hervor, daß ein Ersetzen derjenigen drei Kugeln, die den Kieselatomen entsprachen, mit Kugeln von einer anderen Größe wahrscheinlich nur eine gewisse Verkleinerung der beobachteten Drehungen zur Folge gehabt hätte (wahrscheinlich auch eine Veränderung der Gestalt derjenigen Kurve, welche die Drehung als Funktion der Wellenlänge darstellt).

3. Während bei den Versuchen mit den tetraedrischen Molekülmodellen die Wellen auch nach dem Passieren eines solchen Modelles nicht merkbar von dem geradlinigen Polarisationszustand abwichen, zeigte es sich bei den Versuchen mit dem zuletzt untersuchten spiralförmigen Modelle, daß die Wellen nach Passieren desselben *schwach elliptisch polarisiert* waren. Am deutlichsten trat dies hervor bei Versuchen mit Wellen von der Länge  $2 \times 14$  cm, also in der unmittelbaren Nähe der Eigenfrequenz der Kugelspirale. Wenn die Stellung des Empfängers zu derjenigen senkrecht war, die der maximalen Intensität entsprach, so war in dem genannten Falle die mit dem Meßresonator gemessene Strahlungsintensität etwa  $\frac{1}{10}$  von der maximalen Intensität, welches bedeutet, daß

1) Vgl. R. W. Wood, Physical Optics S. 493. 1914.

das Verhältnis der kleineren Ellipsenachse zu der größeren  $= 1 : \sqrt{10} =$  etwa  $1 : 3$  war. Daß sich eine merkbare Elliptizität hier geltend machte, ist erklärlich mit Bezug auf das relativ große Absorptionsvermögen der Kugelspirale, welches nach Versuchen, die ich mit Kugelgittern früher ausgeführt habe, für diejenigen Wellen am größten war, deren Länge ein wenig kleiner als die Eigenwellenlänge der Kugeln war (also hier gerade für Wellen von etwa  $2 \times 14$  cm Länge).

4. Nach dem Bragg-Beckenkampaschen Strukturmodelle des Quarzes würden die Kieselatome allein keine optische Drehung hervorbringen können. Damit ein einzelnes Molekül eine Drehung zu erzeugen vermöge, sind auch nach den in der Einleitung erwähnten Theorien von Oseen, Born und Stark mindestens vier im Raume asymmetrisch geordnete, zu dem Molekül gehörige Valenzelektronen dazu nötig (es ist dies besonders von Stark ausdrücklich hervorgehoben worden). Bei einem Versuche mit einer Kugelspirale, die nur aus denjenigen drei Kugeln bestand, welche bei den obigen Versuchen den Kieselatomen des Strukturelementes des Quarzes entsprachen, konnte ich in der Tat keine merkbare Drehung der elektrischen Wellen beobachten.

Physik. Institut der schwedischen Universität (Akademie)  
zu Åbo (Finland), im Januar 1924.

(Eingegangen 19. Februar 1924.)

#### 4. Die Intensitätsverteilung der Komponenten von $H_{\alpha}$ ;

von E. Gehrcke und E. Lau.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die Intensitätsverteilung einer einzelnen Spektrallinie ist durch die Gauss'sche Fehlerkurve bestimmt, wenn man mit Rayleigh<sup>1)</sup> annimmt, daß lediglich die durch das Dopplersche Prinzip gegebenen Einflüsse für die Wellenlängen maßgebend sind; andere Einflüsse, wie die Änderung der Schwingungsphase durch Zusammenstöße der Moleküle, bedingen nach Michelson<sup>2)</sup> eine andere Funktion für die Intensitätsverteilung als die Gauss'sche, doch bleibt ihr Verlauf von sehr ähnlicher Art. P. P. Koch<sup>3)</sup> hat die Intensitätsverteilung der roten Cadmiumlinie 6439 Å.-E. experimentell untersucht und hier innerhalb der Meßgenauigkeit die Gauss'sche Fehlerkurve gefunden. Am Wasserstoff, welcher bei gegebener Temperatur die breitesten Linien besitzt und daher die Intensitätsverteilung besonders gut untersuchen läßt, sind früher nur die sehr breiten Verteilungen der bewegten Intensität von Kanalstrahlen untersucht worden,<sup>4)</sup> und ferner von Gehrcke und Lau<sup>5)</sup> die Linien in der positiven Säule unter möglichst störungsfreien Verhältnissen des leuchtenden Wasserstoffs. Hier liegt eine gewisse Schwierigkeit darin, daß die Wasserstofflinien der Balmer'schen Serie enge Doppellinien sind und die Intensitätsverteilungen der Einzellinien einander überlagern. Die geringsten Überlagerungen erhält man bei tiefer Temperatur, und wir möchten im folgenden einige Angaben über die

1) Rayleigh, Phil. Mag. 27. S. 298. 1889.

2) A. A. Michelson, Astrophys. Journ. 2. S. 251. 1895.

3) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 42. S. 25 u. 26. 1913.

4) Literatur vgl. bei W. Wien, Kanalstrahlen (Handbuch d. Radiologie) S. 231 ff. 1924.

5) E. Gehrcke u. E. Lau, Ann. d. Phys. 65. S. 564. 1921; 67. S. 388. 1922.

Intensitätsverteilung von  $H_\alpha$  machen, die sich aus unseren Versuchen mit einer Entladungsröhre, welche durch flüssige Luft abgekühlt war, entnehmen lassen.

In Fig. 1 sind die Ergebnisse unserer Versuche übersichtlich dargestellt. Es bedeutet die punktierte Kurve je eine Gauss'sche Fehlerkurve

$$J = 2 \frac{(\delta \lambda)^2}{10},$$

wo die Ordinate  $J$  die Intensität, die Abszisse  $\delta \lambda$  die Abweichung der Wellenlänge von der Mitte, gemessen in Hundertstel Ångström-Einheiten bedeutet. Die Halbweite dieser Kurven beträgt 0,031 Å.-E., entsprechend einer Temperatur des leuchtenden Wasserstoffs von  $-97^\circ \text{C}$ . Die ausgezogenen Linien, welche in ihren oberen Teilen nicht von den theoretischen, punktierten Kurven zu trennen sind, stellen die von uns an der beiden Komponenten von  $H_\alpha$  gefundene, experimentelle Intensitätsverteilung dar, wie sie mit Interferenzspektroskop von Lummer und Gehrcke früher in Fig. 5 der Taf. I unserer Abhandlung a. a. O. von uns veröffentlicht worden ist (links die kürzere, rechts die längere Welle). Man sieht, daß die Spitzen

und mehr als die Hälften der theoretischen Kurven mit den experimentellen Kurven zusammenfallen, doch sind die Füße der beiden Kurven etwas voneinander verschieden; hier zeigt die experimentelle Kurve eine etwas stärkere Erhebung als die theoretische Kurve. Dieser Befund erklärt sich durch die Versuchsanordnung: das Intensitätsminimum zwischen zwei aufeinander folgenden Ordnungen der Interferenzen ist nämlich, wie bekannt, nicht vollständig; besonders in der Nähe des Hauptmaximums jeder einzelnen Wellenlänge sind die sekundären Maxima keineswegs verschwindend, sondern von



Intensitätsverteilung von  $H_\alpha$

Fig. 1.

der Größenordnung, welche die Abweichung der theoretischen von der experimentellen Kurve tatsächlich zeigt. So wird man schließen dürfen, daß die Komponenten der Wasserstofflinie  $H_\alpha$  eine Intensitätsverteilung besitzen, die innerhalb der erreichten Beobachtungsgenauigkeit mit der Gauss'schen Fehlerkurve übereinstimmt; dieses Ergebnis ist mit der Ansicht verträglich, daß bei der von uns angewandten Erzeugungsweise von  $H_\alpha$  die Intensitätsverteilung jeder Komponente durch den Dopplereffekt der leuchtenden Teilchen bestimmt wird.

(Eingegangen 1. Mai 1924.)



nten

chen

man

e H.

hten

curve

glich,

die

pler-